5. Bilineáris függvények

5.1 Lineáris függvény, bilineáris függvény és mátrixa

5.1.1 Definíció: lineáris függvény egy $f: V_K \to K$ lineáris leképezés. Ezek $Hom_K(V,K)$ elemei, azaz egy K feletti vektorteret alkotnak, amelynek dimenziója $\mathbf{dim}(V)<\infty$ esetén (mi csak ezzel az esettel foglalkozunk) $\mathbf{dim}_K(Hom_K(V,K))=\mathbf{dim}_K(V)\cdot\mathbf{dim}_K(K)=\mathbf{dim}(V)$. Ezt V duális terének hívjuk, jelölése V^*. Ennek két eleme nyilván pontosan akkor azonos, ha egy (tetszőleges) bázison ugyanazokat az értékeket veszik fel, azaz egy lineáris függvényt elég egy bázison megadni.

Legyen $e_1,e_2,\dots,e_n$ bázis V-ben. Legyen továbbá e_k^* az a lineáris függvény, amely e_k-n 1-et vesz fel, a bázis többi elemén pedig 0. Ekkor az e_k^* függvények bázist alkotnak V^*-ban, hiszen az a lineáris függvény, amely e_k-n a_k-t vesz fel, éppen $\sum_{k=1}^n a_k e_k^*$. Tehát a $*: e_k \mapsto e_k^*$ megfeleltetés egyértelműen terjeszthető ki $*: V \to V^*$ lineáris leképezéssé, ami persze izomorfizmus lesz. Ugyanígy csinálhatunk V^*-ból az $(e_k^*)_{k=1}^n$ bázisból kiindulva egy $(V^*)^*$ teret. Viszont V elemei épp a V^* feletti lineáris függvények – rendelje a $v\in V$ függvény $u^*\in V^*$-hoz $u^*(v)$-t. Könnyen ellenőrizhetően ez tényleg lineáris lesz. Az $(e_k^*)_{k=1}^n$ bázis képe nyilván $(e_k)_{k=1}^n$, tehát $(V^*)^*$ nem egyszerűen izomorf, hanem azonos V-vel, ráadásul $(v^*)^*=v$, hiszen $(e_k^*)^*=e_k$.

5.1.2 Definíció: egy $B: V_K\times V_K \to K$ leképezés bilineáris függvény, ha $\forall x\in V$-re $x_R: y\mapsto B(x,y)$ lineáris függvény, továbbá $\forall y\in V$-re $y_L: x\mapsto B(x,y)$ is lineáris függvény. Tehát:

(1) $\forall x_1,x_2,y\in V$: $B(x_1+x_2,y)=B(x_1,y)+B(x_2,y)$
(2) $\forall x,y_1,y_2\in V$: $B(x,y_1+y_2)=B(x,y_1)+B(x,y_2)$
(3) $\forall x,y\in V,\lambda\in K$: $B(\lambda\cdot x,y)=\lambda\cdot B(x,y)$
(4) $\forall x,y\in V,\lambda\in K$: $B(x,\lambda\cdot y)=\lambda\cdot B(x,y)$

5.1.3 Definíció: legyen B egy V feletti bilineáris függvény, legyen $(e_i)_{i=1}^n$ és $(f_j)_{j=1}^n$ V két (nem feltétlenül különböző bázisa). Ekkor B mátrixa az e_i,f_j bázispárban az a $\mathbf{B}$ mátrix, melyben $b_{ij}=B(e_i,f_j)$. Speciálisan B mátrixa az $(e_k)_{k=1}^n$ bázisban az a $\mathbf{B}$ mátrix, melyben $b_{ij}=B(e_i,e_j)$.

5.1.4 Állítás: ha az $(e_i)_{i=1}^n$ és $(e_k^*)_{k=1}^n$ bázisok közötti átmenet mátrixa $\mathbf{P}$ (azaz $e_k^*=\sum_{i=1}^n p_{ki}\cdot e_i$, ahol $\mathbf{det}(\mathbf{P})\neq 0$), az $(f_j)_{j=1}^m$ és $(f_l^*)_{l=1}^m$ bázisok közötti átmenet mátrixa $\mathbf{S}$, továbbá a B bilineáris függvény mátrixa az e_i,f_j bázispárban $\mathbf{B}$, akkor B mátrixa az e_i^*,f_l^* bázispárban $\mathbf{B}^*=\mathbf{P}\cdot\mathbf{B}\cdot\mathbf{S}^T$.

Bizonyítás: $b_{kl}^*=B(e_k^*,f_l^*)=B(\sum_{i=1}^n p_{ki}\cdot e_i,\sum_{j=1}^m s_{lj}\cdot f_j)$. A bilinearitás miatt $b_{kl}^*=\sum_{i,j}p_{ki}\cdot B(e_i,e_j)\cdot s_{lj}=\sum_{i,j}p_{ki}\cdot b_{ij}\cdot s_{lj}$. Ez éppen $\mathbf{P}\cdot\mathbf{B}\cdot\mathbf{S}^T$ k-adik sorának l-edik eleme.

Következmények:

(1) ha B mátrixa az (e_i) bázisban $\mathbf{B}$, az (f_i) bázisban $\mathbf{B}^*$, akkor $\mathbf{B}^*=\mathbf{P}\cdot\mathbf{B}\cdot\mathbf{P}^T$, ahol $\mathbf{P}$ az átmenet mátrixa.

(2) B mátrixának rangja nem függ a bázispár megválasztásától, hiszen $\mathbf{P}$ és $\mathbf{S}$ invertálhatóak. Speciálisan $\mathbf{det}(\mathbf{B}^*)=0 \Leftrightarrow \mathbf{det}(\mathbf{B})=0$.

5.1.5 Definíció: a $B_1: V_1\times V_1\to K$ és $B_2: V_2\times V_2\to K$ bilineáris függvények ekvivalensek, ha van a hozzájuk tartozó terek között olyan izomorfizmus, ami őket is egymásba viszi, azaz $\exists\varphi\in Hom(V_1,V_2)$: $B_1(x,y)=B_2(x\varphi,y\varphi)$. Ez valóban ekvivalencia-reláció.

5.1.6 Megjegyzés: ha B ill. B' bilineáris függvények mátrixa az (e_i) ill. (e_i') bázisokban azonos, akkor B és B' ekvivalensek, hiszen az egyik bázist a másikba vivő izomorfizmus megfelel a fenti feltételeknek.

5.1.7 Definíció: az $\mathbf{A},\mathbf{B}\in M_n(K)$ mátrixok kogredienseк, ha $\mathbf{A}=\mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{P}^T$ valamely invertálható $\mathbf{P}$-re. Ez könnyen ellenőrizhetően ekvivalencia-reláció.

5.1.8 Állítás: $B_1: V_1\times V_1\to K$ és $B_2: V_2\times V_2\to K$ bilineáris függvényekre az alábbi feltételek ekvivalensek:

(1) B_1 és B_2 ekvivalensek;
(2) felírva B_1 ill. B_2 mátrixát V_1 ill. V_2 tetszőleges bázisában a kapott mátrixok kogrediensek;
(3) van V_1-nek és V_2-nek olyan bázisa, hogy ezekben felírva B_1 ill. B_2 mátrixát azok kogrediensek.

Bizonyítás: **(1)** $\Rightarrow$ **(3)**: ha B_1 és B_2 ekvivalensek, akkor definíció szerint van a hozzájuk tartozó vektorterek között egy φ izomorfizmus, amelyre $B_1(x,y)=B_2(x\varphi,y\varphi)$. Felírva B_1 mátrixát egy tetszőleges bázisban és B_2 mátrixát e bázis φ szerinti képében a két mátrix azonos, tehát kogrediens lesz.

(3) $\Rightarrow$ **(2)**: legyen B_1 ill. B_2 mátrixa alkalmas bázisokban $\mathbf{B}_1$ ill $\mathbf{B}_2$ és legyenek ezek kogrediensek. Legyen valamely más bázisokban a két mátrix $\mathbf{B}_1'$ ill $\mathbf{B}_2'$. **5.1.4.1** felhasználásával $\mathbf{B}_1'$ és $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_1$ és $\mathbf{B}_2$, $\mathbf{B}_2$ és $\mathbf{B}_2'$ rendre kogrediensek. A tranzitivitás miatt $\mathbf{B}_1'$ és $\mathbf{B}_2'$ is kogrediensek.

(2) $\Rightarrow$ **(1)**: Legyen B_1 mátrixa (e_i)-ben $\mathbf{B}_1$, B_2-é (f_i)-ben $\mathbf{B}_2=\mathbf{P}\mathbf{B}_1\mathbf{P}^T$. Írjuk fel B_1 mátrixát az $f_i^*=\sum_k p_{ik}\cdot f_k$ bázisban. Ekkor **5.1.4.1** szerint $\mathbf{P}\mathbf{B}_1\mathbf{P}^T$-t kapunk, azaz $\mathbf{B}_2$-t, tehát **5.1.6** szerint B_1 és B_2 valóban ekvivalensek.

5.1.9 Definíció: B bilineáris függvény rangja a mátrixának rangja. (Ez **5.1.4.2** szerint egyértelmű.) Jelölése $r(B)$.

5.1.10 Állítás: tetszőleges B bilineáris függvény mátrixa alkalmas bázispárban olyan diagonális mátrix, melynek első $r(B)$ eleme 1, a többi 0. Ezt B duális bázisának hívjuk.

Bizonyítás: legyen B mátrixa valamely (b_k) bázisban $\mathbf{B}$. Tudjuk (ld. **2.6.6**), hogy alkalmas $\mathbf{P},\mathbf{S}^T\in M_n(K)$ invertálható mátrixokra $\mathbf{P}\cdot\mathbf{B}\cdot\mathbf{S}^T$ a kívánt alakú. **5.1.4** szerint B mátrixa egy olyan e_i,f_j bázispárban, ahol az átmenet mátrixa $\mathbf{P}$ ill. $\mathbf{S}$, éppen $\mathbf{P}\cdot\mathbf{B}\cdot\mathbf{S}^T$ lesz. Ezzel az állítást beláttuk.

5.2 Merőleges altér, radikál, nem-elfajuló bilineáris függvény

5.2.1 Definíció: legyen $B: V\times V\to K$ bilineáris függvény. $x,y\in V$ merőlegesek, ha $B(x,y)=0$. Jelölése $x\perp y$. (Az, hogy x és y merőlegesek, nem feltétlenül azonos azzal, hogy y és x merőlegesek.)

5.2.2 Definíció: $B: V\times V\to K$ bilineáris függvény, $U\subseteq V$-re U bal merőlegese $U^{\perp L}=\{x\in V \mid \forall u\in U: x\perp u\}=\{x\in V: x_R|_U\equiv 0\}$, jobb merőlegese pedig $U^{\perp R}=\{y\in V \mid \forall u\in U: u\perp y\}=\{y\in V: y_L|_U\equiv 0\}$. $V^{\perp L}$-t ill. $V^{\perp R}$-t bal ill. jobb radikálnak hívjuk. A bilinearitás miatt $0\in U^{\perp L}$ $u,v\in U^{\perp L},\lambda,\mu\in K\Rightarrow\lambda u+\mu v\in U^{\perp L}$, tehát $U^{\perp L}\leq V$ és persze $U^{\perp R}\leq V$.

5.2.3 Tétel: egy $B: V\times V\to K$ bilineáris függvényre az alábbi feltételek ekvivalensek:

(1) $V^{\perp L}=\{0\}$

(2) $V^{\perp R}=\{0\}$

(3) tetszőleges bázis(pár)ban felírva a mátrixát, annak determinánsa nem 0.

Bizonyítás: nyilván elég belátni, hogy **(2)** $\Leftrightarrow$ **(3)**. Legyen B mátrixa az e_i,f_j bázispárban $\mathbf{B}$. Pontosan akkor nem teljesül **(2)**, ha $\exists v\in V\setminus\{0\}: v_L\equiv 0$. v_L lineáris függvény, tehát elég a bázison megadni. Így $v_L\equiv 0\Leftrightarrow\forall e_i: B(e_i,v)\equiv 0$. Felírva v-t $\sum x_k\cdot f_k$ alakban azt kapjuk, hogy pontosan akkor lesz $v_R\equiv 0$ valamely $v\neq 0$ vektorra, ha az $(x_k)_{i=1}^n\cdot\mathbf{B}=0$ homogén lineáris egyenletrendszernek van nem triviális megoldása. Ez a Cramer -szabály szerint ekvivalens **(3)**-al.

5.2.4 Definíció: egy bilineáris függvény nem-elfajuló, ha teljesíti a fenti feltételeket.

5.2.5 Tétel: a $B: V\times V\to K$ bilineáris függvényre $\mathbf{dim}(V)-\mathbf{dim}(V^{\perp L})=\mathbf{dim}(V)-\mathbf{dim}(V^{\perp L})=r(B)$.

Bizonyítás: legyen e_i,f_j B egy duális bázisa, $n=\mathbf{dim}(V)$. Ekkor $V^{\perp L}=\langle f_i \mid 1\leq i\leq n\rangle^{\perp L}=\langle e_i \mid r<i\leq n\rangle$ és hasonlóan $V^{\perp R}=\langle f_i \mid r<i\leq n\rangle$. Mindkettő $n-r$ dimenziós, ez volt bizonyítandó.

5.2.6 Állítás: ha $B: V\times V\to K$ nem-elfajuló bilineáris fv. és $U\leq V$, akkor $\mathbf{dim}(U^{\perp R})=\mathbf{dim}(U^{\perp R})=\mathbf{dim}(V)-\mathbf{dim}(U)$.

Bizonyítás: nyilván elég az állítást a jobb merőlegesre bizonyítani. Először azt látjuk be, hogy $\mathbf{dim}(U^{\perp R})+\mathbf{dim}(U)\leq\mathbf{dim}(V)$. Írjuk fel B mátrixát egy olyan bázispárban, ahol az egyik U egy $(x_i)_{i=1}^k$ bázisának kiegészítése, a másik pedig $U^{\perp R}$ egy $(y_j)_{j=1}^m$ bázisának kiegészítése. A mátrix bal felső $k\times m$-es részmátrixának elemei $B(x_i,y_j)$ alakúak, ahol $x_i\in U, y_j\in U^{\perp R}$. Ezek tehát 0-k. Ha viszont $k+m>n$ lenne, akkor a determináns minden kifejtési tagja tartalmazna legalább egy tényezőt ebből a téglalapból, tehát 0 lenne, ami ellentmond annak, hogy B nem-elfajuló.

Másrészt $U^{\perp R}=\bigcap_{i=1}^k\{x_i\}^{\perp R}$, hiszen $v\in V$ pontosan akkor lesz jobbról merőleges U-ra, ha egy bázisának minden elemére jobbról merőleges. $\{x_i\}^{\perp R}$ viszont éppen az $(x_i)_L: V\to K$ lineáris függvény magtere, azaz $(n-1)$-dimenziós (ha B elfajuló lenne, akkor lehetne n-dimenziós is). k darab $(n-1)$-dimenziós altér metszete legalább $(n-k)$ -dimenziós, ezért $\mathbf{dim}(U^{\perp R})\geq n-k$. Ezzel az állítást beláttuk.

5.2.7 Állítás: a fenti feltételek mellett $(U^{\perp R})^{\perp L}=(U^{\perp L})^{\perp R}=U$. Ugyanis $U\subseteq(U^{\perp R})^{\perp L}$ nyilvánvaló és **5.2.6** miatt ezek azonos dimenziójú alterek.

5.3 Szimmetrikus és alternáló bilineáris függvények

5.3.1 Definíció: a B bilineáris függvény szimmetrikus, ha $\forall x,y\in V$: $B(x,y)=B(y,x)$. Ez ekvivalens azzal, hogy a mátrixa tetszőleges bázisban szimmetrikus a főátlóra.

5.3.2 Definíció: a B bilineáris függvény alternáló vagy szimplektikus, ha $\forall x\in V$: $B(x,x)=0$.

5.3.3 Definíció: a B bilineáris függvény ferdén szimmetrikus, ha $\forall x,y\in V$: $B(x,y)=-B(y,x)$. Ez ekvivalens azzal, hogy mátrixa tetszőleges bázisban a transzponáltjának (-1)-szerese.

5.3.4 Megjegyzés: ha B alternáló, akkor $B(x,y)=B(x+y,x+y)-B(x,x)-B(y,y)-B(y,x)=-B(y,x)$, tehát ferdén szimmetrikus. Ha B ferdén szimmetrikus és a test karakterisztikája nem 2, akkor $B(x,x)=-B(x,x)\Rightarrow B(x,x)=0$, tehát alternáló. Ha B ferdén szimmetrikus és a test karakterisztikája 2, akkor szimmetrikus.

5.3.5 Megjegyzés: ha a test karakterisztikája nem 2, akkor tetszőleges bilineáris függvény egyértelműen áll elő $B=B_1+B_2$ alakban, ahol B_1 szimmetrikus, B_2 pedig ferdén szimmetrikus. Ugyanis ekkor van értelme annak, hogy $\frac{1}{2}$, így épp $B_1(x,y)=\frac{1}{2}B(x,y)+\frac{1}{2}B(y,x)$ és $B_2(x,y)=\frac{1}{2}B(x,y)-\frac{1}{2}B(y,x)$ a keresett felírás.

5.3.6 Tétel: ha a $B: V\times V\to K$ bilineáris függvényre $x\perp y\Leftrightarrow y\perp x$, akkor B vagy alternáló, vagy szimmetrikus.

Bizonyítás: legyen B ilyen, legyenek u,v,z tetszőleges V-beli elemek, továbbá legyen $s=B(x,y)\cdot z-B(x,z)\cdot y$. Ekkor $B(x,s)=B(x,y)\cdot B(x,z)-B(x,z)\cdot B(x,y)=0$, azaz $x\perp s$. Így $s\perp x$, azaz $0=B(s,x)=B(x,y)\cdot B(z,x)-B(x,z)\cdot B(y,x)$. Tehát ⚀ $\forall x,y,z\in V$: $B(x,y)\cdot B(z,x)=B(x,z)\cdot B(y,x)$. Ebbe beírva $x=z$-t ⚁ $\forall x,y\in V$: $B(x,x)\cdot[B(x,y)-B(y,x)]=0$.

↟ B se nem szimmetrikus, se nem alternáló, azaz $\exists u,v,w\in V$, hogy ⚂ $B(u,v)\neq B(v,u)$ és ⚃ $B(w,w)\neq 0$. Írjunk ⚁-be $x=u,y=v$-t: $B(u,u)\cdot[B(u,v)-B(v,u)]=0$. A zárójelben lévő kifejezés u és v választása miatt nem lesz 0, így a másik tényező köteles 0 lenni: ⚄ $B(u,u)=0$. ⚁-be $x=w,y=u$-t írva a zárójel kell 0 legyen, azaz ⚅ $B(u,w)=B(w,u)$. Most ⚀-be $x=u,y=v,z=w$-t írva $B(u,v)B(w,u)=B(u,w)B(v,u)$. E két szorzat egy-egy tényezője ⚅ szerint megegyezik, a másik két tényező ⚂ miatt különbözik. Csak úgy állhat fenn egyenlőség, ha (7) $B(u,w)=B(w,u)=0$. Helyettesítsünk $x=v+w,y=u$-t ⚁-be: $B(v+w,v+w)\cdot[B(v+w,u)-B(u,v+w)]=0$. A szögletes zárójelben (7) szerint $B(u,v+w)-B(v+w,u)=B(u,v)-B(v,u)+[B(u,w)-B(w,u)]=B(u,v)-B(v,u)$ lesz, ami ⚂ miatt nem 0, tehát $B(v+w,v+w)=0$. Mivel u és v szerepe felcserélhető, ugyanígy $B(u+w,u+w)=0$.

Ebbe beírva ⚄-t és (7)-t $0=B(u+w,u+w)=B(u,u)+B(u,w)+B(w,u)+B(w,w)=B(w,w)$, ami ⚃ szerint ↯.

5.3.7 Definíció: legyen $B: V\times V\to K$ szimmetrikus vagy alternáló bilineáris függvény. V ortogonális összege az U és W altereknek, ha direkt összege, továbbá $\forall(u,v)\in U\times W$: $u\perp v$. Jelölése $V=U\perp W$. (B választása miatt U és W szerepe felcserélhető.)

5.3.8 Állítás: ha B alternáló bilineáris függvény, akkor alkalmas bázisban a mátrixa néhány $\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$ blokk és néhány 0 direkt összege.

Bizonyítás: megadunk egy algoritmust, ami kiad egy ilyen bázist. Tegyük fel, hogy már kiválasztottuk a bázis első néhány elemét, $u_1,v_1,u_2,v_2,\dots,u_k,v_k$-t, ahol $B(u_i,v_i)=-B(v_i,u_i)=1$ és minden más 0. A mátrix egyelőre k darab $\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$ direkt összege. Legyen az eddigi elemek által feszített altér U. Lássuk be, hogy $V=U\perp U^{\perp}$. Ezek független alterek, mert U-ra megszorítva B-t a fenti bázisban felírt mátrixának determinánsa 1, tehát nem-elfajuló, így radikálja $U\cap U^{\perp}=\{0\}$. Az még nyilvánvalóbb, hogy ezek merőleges alterek. Azt kell bebizonyítanunk, hogy $\forall w\in V$ előáll $x+(w-x):(x,w-x)\in U\times U^{\perp}$ alakban. Legyen $x=\left(\sum B(w,v_i)\cdot u_i\right)-\left(\sum B(w,u_i)\cdot v_i\right)\in U$. Ekkor bármely u_j-re $B(x,u_j)=\left(\sum B(w,v_i)\cdot B(u_i,u_j)\right)-\left(\sum B(w,u_i)\cdot B(v_i,u_j)\right)$. A bázis eddigi elemeinek választása miatt ebben az összegben a $-B(w,u_j)\cdot B(v_j,u_j)=-B(w,u_j)\cdot(-1)=B(w,u_j)$ tagon kívül mindegyik 0, tehát $B(x,u_j)=B(w,u_j)$, ezért $B(w-x,u_j)=0$. Hasonlóan bármely v_j-re $B(w-x,v_j)=0$. Eszerint $w-x$ merőleges U bázisára, így az egész U-ra is. Ez tehát épp a keresett felírás. Így ha $U^{\perp}$-ben találunk olyan u_{k+1},v_{k+1} vektorokat, melyekre $B(u_{k+1},v_{k+1})=-B(v_{k+1},u_{k+1})=1$, akkor ezeket hozzávéve a bázishoz továbbra is megfelelő lesz B mátrixa, mert az új elemek merőlegesek lesznek az eddigiekre, a hozzávett blokk pedig $\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$. Ehhez viszont elég, hogy valamely u,v-re $B(u,v)=b\neq 0$ legyen, hiszen ekkor $u_{k+1}=u\cdot b^{-1},v_{k+1}=v$ jó lesz. Ha pedig $U^{\perp}$-ben $B(u,v)$ mindig 0 – azaz ha nem tudjuk folytatni az algoritmust – , akkor $U^\perp$ tetszőleges bázisa jó lesz kiegészítésnek, mert csak 0-kat vesz hozzá a mátrixhoz. (Ekkor $U^\perp = V^\perp$.) Ezzel az állítást beláttuk.

5.3.9 Következmény: páros dimenziójú vektortérben pontosan egy nem-elfajuló alternáló bilineáris függvény van (minden ilyen ekvivalens), páratlan dimenziójúban pedig egy sincs.

5.3.10 Állítás: ha $B: V \times V \to K$ szimmetrikus bilineáris függvény és $char K \neq 2$, akkor B mátrixa alkalmas bázisban diagonális.

Bizonyítás: ismét algoritmust adunk. Tegyük fel, hogy már találtunk $v_1, v_2, \ldots, v_k$ elemeket, melyek páronként merőlegesek, továbbá $B(v_i, v_i) = b_i \neq 0$. Legyen az eddigi elemek által feszített altér U. Lássuk be, hogy $V = U \perp U^\perp$. Ugyanúgy, mint **5.3.8**-ban, csak az nem nyilvánvaló, hogy e két altér generálja V-t. Viszont könnyen ellenőrizhetően tetszőleges $w \in V$-re $x = \sum B(w, v_i) \cdot b_i^{-1} \cdot v_i$ esetén $(x, w - x) \in U \times U^\perp$. Ha $U^\perp$-ben van olyan v_{k+1} elem, melyre $B(v_{k+1}, v_{k+1}) \neq 0$, akkor hozzávehetjük az eddigi elemekhez. Ha nincs ilyen elem, azaz $\forall x \in U^\perp : B(x, x) = 0$, akkor $\forall x, y \in U^\perp : 2B(x, y) = B(x+y, x+y) - B(x, x) - B(y, y) = 0$. A test karakterisztikája nem 2, tehát ebből következik, hogy B $U^\perp$-re megszorítva azonosan 0, tehát $U^\perp$ tetszőleges bázisával folytatva $v_1, \ldots, v_k$-t a mátrixba csak néhány 0 kerül be, azaz diagonális marad. (Ismét $U^\perp = V^\perp$.) Ezzel az állítást beláttuk.

5.3.11 Definíció: legyen $B: V \times V \to K$ bilineáris függvény. Az $(e_i)_{i=1}^n$ bázis ortogonális, ha elemei páronként merőlegesek, azaz B mátrixa ebben a bázisban diagonális. Ekkor szimmetrikus is, tehát ilyen csak szimmetrikus B-re létezhet; ha $char K \neq 2$, akkor létezik is **5.3.10** szerint.

5.3.12 Megjegyzés: ha két szimmetrikus bilineáris függvény mátrixának diagonális alakjában az átlóelemek csak annyira különböznek, hogy a megfelelő elemek hányadosa a test valamely elemének négyzete, akkor ekvivalensek. Ugyanis ha pl. a B bilineáris függvény $(e_i)_{i=1}^n$ bázisban felírt $\mathbf{B}$ mátrixában az átlóelemek rendre x_i^2-szeresei a B' bilineáris függvény $\mathbf{B}'$ mátrixának megfelelő átlóelemeinek, akkor B mátrixa az $(x_i^{-1} \cdot e_i)_{i=1}^n$ bázisban $\mathbf{B}'$, tehát B és B' **5.1.8** szerint ekvivalensek.

Most már néhány K testről meg tudjuk állapítani, hogy hány páronként nem-ekvivalens nem-elfajuló szimmetrikus bilineáris függvény van K^n-ben.

5.3.13 Állítás: ha K algebrailag zárt, akkor pontosan egy van. Mivel algebrailag zárt testben minden elem előáll valamely elem négyzeteként, két tetszőleges szimmetrikus bilineáris függvény tetszőleges diagonális mátrixára alkalmazhatjuk **5.3.12**-t és kész vagyunk.

5.3.14 Sylvester-féle tehetetlenségi tétel: legyen $B: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nem-elfajuló szimmetrikus bilineáris függvény. Legyen ennek a mátrixa az $(u_i)_{i=1}^n$ ill. $(v_i)_{i=1}^n$ bázisokban $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$, mindkettő diagonális. Ekkor mindkettőben ugyanannyi a pozitív elemek száma. (Ebből **5.1.8** alapján következik, hogy az $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in M_n(\mathbb{R})$ csak $1, -1$ átlóelemeket tartalmazó diagonális mátrixok pontosan akkor kogrediensek, ha ugyanannyi $+1$-et tartalmaznak.)

Bizonyítás: feltehetjük, hogy mindkét mátrixban elöl vannak a pozitív elemek, utána a negatívak. Legyen $\mathbf{A}$-ban p, $\mathbf{B}$-ben q pozitív elem. Legyen $x = \sum_{i=1}^p \lambda_i u_i$, ahol nem minden λ_i nulla. Ekkor $B(x, x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 B(u_i, u_i) > 0$. Hasonlóan ha $y = \sum_{i=q+1}^n \mu_i v_i$ és nem minden μ_i nulla, akkor $B(y, y) < 0$. Eszerint az $U_1 = \langle u_1, u_2, \ldots, u_p \rangle$ és a $V_2 = \langle v_{q+1}, v_{q+2}, \ldots, v_n \rangle$ alterek metszete $\{0\}$, mert a metszetben lévő tetszőleges $v \neq 0$ elemre $0 > B(v, v) > 0$ lenne. Akkor viszont $\mathbf{dim}(U_1) + \mathbf{dim}(V_2) \leq \mathbf{dim}(V)$, tehát $p + (n - q) \leq n$. Ugyanígy $q + (n - p) \leq n$, amiből következik $p = q$, a bizonyítandó állítás.

5.3.15 Állítás: az n-dimenziós valós vektortér felett pontosan $n+1$ páronként nem ekvivalens nem-elfajuló szimmetrikus bilineáris függvény van.

Bizonyítás: tetszőleges nem 0 valós szám előáll $\pm 1 \cdot r^2 : r \in \mathbb{R}$ alakban, **5.3.12** alapján tehát minden nem 0 determinánsú diagonális valós elemű mátrix kogrediens egy olyannal, amelynek átlóiban csak ± 1-ek vannak. Mivel ilyenből legfeljebb $n+1$ lényegében (nem csak az elemek sorrendjében) különböző van, legfeljebb ennyi különböző nem-elfajuló szimmetrikus bilineáris függvény lehet. Másrészt **5.3.14** szerint ez az $n+1$ mátrix valóban páronként inkogrediens. Ezzel az állítást beláttuk.

5.3.16 Állítás: $\mathbb{Q}$ felett végtelen sok páronként nem ekvivalens bilineáris függvény van

Bizonyítás: azon diagonális mátrixok, melyek utolsó eleme p prím, a többi pedig 1, páronként inkogrediensek. Ugyanis két kogrediens mátrix determinánsának hányadosa $\mathbf{det}^2(\mathbf{P})$, egy racionális szám négyzete, viszont két különböző prím hányadosa nem áll elő ilyen alakban.

5.3.17 Definíció: B nem-elfajuló szimmetrikus bilineáris függvény izotróp, ha $\exists v\neq 0$: $B(v,v)=0$.

5.3.18 Definíció: B nem-elfajuló szimmetrikus bilineáris függvény univerzális, ha $\forall a\in K\exists v\in V$: $B(v,v)=a$.

5.3.19 Lemma: ha B izotróp és $char K\neq 2$, akkor B univerzális.

Bizonyítás: legyen $B(u,u)=0$. Mivel B nem-elfajuló, $\exists w'\in V$: $B(u,w')=b\neq 0$. Mivel $char K\neq 2$, $2b\neq 0 \Rightarrow \exists \frac{1}{2b}\in K$, azaz $w=\frac{1}{2b}\cdot w'$ választással $B(u,w)=\frac{1}{2}$. Legyen $x\in K$ tetszőleges és legyen $v=x\cdot u+w$. Ekkor $B(v,v)=x^2\cdot B(u,u)+2x\cdot B(u,w)+B(w,w)=B(w,w)+x$, azaz ha x befutja K-t, akkor $B(v,v)$ is. Ezzel az állítást beláttuk.

5.3.20 Lemma: ha $B: V\times V\rightarrow \mathbb{F}_p$ nem-elfajuló szimmetrikus bilineáris függvény, $p>2$ és $n\geq 2$, akkor B univerzális. (Egy dimenzióban az a bilineáris függvény, aminek a mátrixa (1), csak kvadratikus maradékot vesz fel, $\mathbb{F}_2$ pedig 2 karakterisztikájú, tehát kikötéseink nem feleslegesek.)

Bizonyítás: szorítsuk meg B-t egy olyan két dimenziós altérre, amelyben nem elfajuló és a vegyük ennek egy olyan bázisát, amelyben a mátrixa diagonális. (Ezt **5.3.10** bizonyítása alapján megtehetjük.) Legyen a bázis $\{u,v\}$, a mátrix pedig $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & b\end{smallmatrix}\right)$. Ekkor $B(xu+yv,xu+yv)=ax^2+by^2$. Ez tetszőleges c értéket felvesz, mert az ax^2 és $c-by^2$ polinomok egyaránt $\frac{p+1}{2}$ különböző értéket vesznek fel $\mathbb{F}_p$-n, tehát van olyan, amit mindkettő felvesz. Ekkor $ax_c^2=c-by_c^2 \Rightarrow B(x_cu+y_cv,x_cu+y_cv)=c$. Tehát B már ezen az altéren is univerzális, így nyilván az egész téren is.

5.3.21 Tétel: pontosan két nem-ekvivalens $B:\mathbb{F}_p^n\times\mathbb{F}_p^n\rightarrow\mathbb{F}_p$ szimmetrikus bilineáris függvény van, speciálisan az a kettő, melyek mátrixa diagonális, utolsó eleme d, a többi átlóelem 1 és d az egyik esetben valamelyik kvadratikus nem-maradék, a másik esetben kvadratikus maradék, pl. 1.

Bizonyítás: ez a két mátrix inkogrediens, mert determinánsaik hányadosa kvadratikus nem-maradék. Egy dimenzióban **5.3.12** miatt nyilván csak ez a kettő lehet aszerint, hogy a mátrixában lévő egyetlenegy elem kvadratikus maradék vagy nem. Több dimenzióban a lemma szerint B univerzális, tehát valamely u_1-re $B(u_1,u_1)=1$. Legyen ez az első báziselem. Ezt ugyanúgy folytathatjuk, mint **5.3.10**-ben, mindaddig, amíg B az eddig kifeszített U altér merőlegesében univerzális, azaz amíg $\mathbf{dim}(U^\perp)>1$. Tehát a bázist meg tudjuk úgy választani, hogy a mátrix első $n-1$ átlóeleme 1 legyen. Az utolsó helyre pedig vagy kvadratikus maradék kerül, vagy nem. Ezzel az állítást beláttuk.

5.4 Kvadratikus alakok és bilineáris függvények

A többváltozós polinomoknál egyszer már definiáltuk a kvadratikus alak avagy kvadratikus forma fogalmát. Ezek a homogén másodfokú polinomok voltak, tehát úgy néztek ki, hogy $\sum_{i\leq j}c_{ij}\cdot x_ix_j$, ahol az együtthatók egy egységelemes kommutatív gyűrűből származtak. Ha ráadásul egy (nem 2 karakterisztikájú) K test elemei, akkor ezt átírhatjuk $\sum_{i,j}d_{ij}\cdot x_ix_j$ alakra, ahol $d_{ii}=c_{ii}$, viszont $i<j$: $d_{ij}=d_{ji}=\frac{1}{2}c_{ij}$. Így $\mathbf{D}=((d_{ij}))$ szimmetrikus mátrix lesz. Tekintsük azt a $B: K^n\rightarrow K^n$ bilineáris függvényt, aminek mátrixa az (e_i) bázisban $\mathbf{D}$ – ez persze szimmetrikus lesz – és nézzük meg, mi lesz $B(v,v)$, ha $v=\sum x_ie_i$. Éppen $\sum_{i,j}d_{ij}\cdot x_ix_j$. Hm. Tehát a kvadratikus alakok és a szimmetrikus bilineáris függvények erősen hasonlítanak. Ennek örömére:

5.4.1 Definíció: $char K\neq 2$ esetén $Q: K^n\rightarrow K$ kvadratikus alak, ha $\forall \lambda\in K, v\in K^n$: $Q(\lambda v)=\lambda^2 Q(v)$, továbbá a $B_Q(x,y)=\frac{1}{2}(Q(x+y)-Q(x)-Q(y))$ egyenlettel definiált B_Q szimmetrikus bilineáris függvény.

5.4.2 Állítás: minden Q kvadratikus alak előáll lineárisan független lineáris függvények négyzetei konstansszorosainak összegeként (innentől: „jó felírás”).

Bizonyítás: Q meghatározza B_Q-t, tehát egyértelműen megadható B_Q mátrixa egy (e_i) bázisban. Másrészt B_Q is meghatározza Q-t, mert B_Q definiáló-egyenletéből és $Q(\lambda v)=\lambda^2 Q(v)$ -ből $B_Q(v,v)=\frac{1}{2}(Q(2v)-2Q(v))=Q(v)$. Ha ez a mátrix $\mathbf{Q}$, akkor könnyen ellenőrizhetően $Q(\sum x_ie_i)=\sum q_{ij}\cdot x_ix_j$. Ha valamely (f_i) bázisban B_Q $\mathbf{Q}'$ mátrixa diagonális, akkor tehát $Q(\sum y_if_i)=\sum q'_{ii}\cdot y_i^2$. Vegyük észre, hogy ezek az f_i^* lineáris függvények négyzetei konstansszorosainak összegei, tehát ez esetben kész lennénk. (Ezek lineárisan függetlenek, mert az (f_i) bázis izomorf képét adják.) Ilyen alak pedig **5.3.10** szerint van. Ezzel az állítást beláttuk.

Ha nekünk Q mint $\sum d_{ij}\cdot x_i x_j$ van megadva és szeretnénk megtalálni egy jó felírását, akkor a következőt kell tennünk. Vegyünk egy (e_i) bázist K^n-ben és legyen $Q(\sum x_i e_i)=Q(x_1,x_2,\dots,x_n)$. Ekkor B_Q mátrixa (e_i)-ben **D** lesz. Keressünk egy (f_k) bázist, amiben B_Q mátrixa diagonális, átlóelemei legyenek (d'_i). Legyen a bázisátmenet mátrixának inverze **S**, azaz $e_i=\sum_{i=1}^n s_{ik} f_k$. Írjuk fel a $\sum x_i e_i$ elemet az (f_k) bázisban: $\sum_{i=1}^n x_i e_i=\sum_{i=1}^n x_i\cdot(\sum_{k=1}^n s_{ik} f_k)=\sum_{k=1}^n f_k\cdot(\sum_{i=1}^n s_{ik} x_i)$. Tudjuk, hogy $Q(\sum_{k=1}^n y_k f_k)=\sum_{k=1}^n d'_k\cdot y_k^2$, mert (f_k)-ban B_Q mátrixa diagonális. Tehát $Q(x_1,x_2,\dots,x_n)=Q(\sum_{i=1}^n x_i e_i)=\sum_{k=1}^n d'_k\cdot(\sum_{i=1}^n s_{ik} x_i)^2$. Ezzel felírtuk Q-t a kívánt alakban.

5.4.3 Definíció: Q kvadratikus alak rangja a B_Q rangja. Q tetszőleges jó felírásában a nem nulla együtthatók száma azonos lesz ezzel, hiszen az együtthatók B_Q megfelelő diagonális mátrixának átlóelemei.

5.4.4 Definíció: Q valós kvadratikus alak szignatúrája $p-q$, ahol p és q a pozitív illetve negatív együtthatók száma Q egy jó felírásában. Ez egyértelmű, mert **5.3.14** szerint B_Q bármely diagonális mátrixában azonos a pozitív és negatív átlóelemek száma.

5.5 Lineáris transzformáció adjungáltja

5.5.1 Állítás: legyen $B: V\times V\to K$ nem-elfajuló bilineáris függvény. Ekkor minden f lineáris függvényre pontosan egy olyan $u\in V$ van, melyre az $u_R(y): y\mapsto B(u,y)$ lineáris függvény éppen f. Formálisan: $\forall f\in V^*\exists! u\in V: f(y)\equiv u_R(y)$ és hasonlóan $\forall f\in V^*\exists! v\in V: f(x)\equiv v_L(x)$.

Bizonyítás: tekintsük a $\varrho: y\mapsto y_R$ leképezést V-ről V^*-ba. Ez a bilinearitás miatt lineáris leképezés lesz és magtere $Ker(\varrho)=V^{\perp R}$, ami $\{0\}$, mert B nem-elfajuló. A képtér tehát a teljes V^*, hiszen dimenziója $\mathbf{dim}(Im\,\varrho)=\mathbf{dim}(V)-\mathbf{dim}(Ker\,\varrho)=\mathbf{dim}(V)$, ami megegyezik $\mathbf{dim}(V^*)$-gal, hiszen V véges dimenziós. Ezért ϱ bijekció, sőt izomorfizmus. Ezzel az állítás egyik felét beláttuk, a másik ugyanígy bizonyítható.

5.5.2 Definíció: legyen $B: V\times V\to K$ nem-elfajuló, szimmetrikus bilineáris függvény és $\mathcal{A}\in Hom(V,V)$. **5.5.1** szerint minden egyes $y\in V$-re pontosan egy olyan $u\in V$ van, amelyre az $x\mapsto(x\mathcal{A},y)$ és az $x\mapsto(x,u)$ lineáris függvények megegyeznek. Legyen $\mathcal{A}$ adjungáltja az az $\mathcal{A}^*$ leképezés, amely y-hoz u-t rendeli.

5.5.3 Állítás: $\mathcal{A}^*$ lineáris leképezés.

Bizonyítás: egyrészt $(x,(y_1+y_2)\mathcal{A}^*)=(x\mathcal{A},y_1+y_2)=(x\mathcal{A},y_1)+(x\mathcal{A},y_2)=(x,y_1\mathcal{A}^*)+(x,y_2\mathcal{A}^*)=(x,y_1\mathcal{A}^*+y_2\mathcal{A}^*)$ miatt $(y_1+y_2)\mathcal{A}^*=y_1\mathcal{A}^*+y_2\mathcal{A}^*$, másrészt $(x,(\lambda y)\mathcal{A}^*)=(x\mathcal{A},\lambda y)=\lambda(x\mathcal{A},y)=\lambda(x,y\mathcal{A}^*)=(x,\lambda(y\mathcal{A}^*))$ miatt $(\lambda y)\mathcal{A}^*=\lambda(y\mathcal{A}^*)$. Ezt akartuk belátni.

5.5.4 Állítás: $*: \mathcal{A}\mapsto\mathcal{A}^*\in Hom(Hom(V,V),Hom(V,V))$, azaz az adjungálás is lineáris leképezés.

$(x(\mathcal{A}_1+\mathcal{A}_2),y)=(x\mathcal{A}_1+x\mathcal{A}_2,y)=(x\mathcal{A}_1,y)+(x\mathcal{A}_2,y)=(x,y\mathcal{A}_1^*)+(x,y\mathcal{A}_2^*)=(x,y(\mathcal{A}_1^*+\mathcal{A}_2^*))$ és $(x(\lambda\mathcal{A}),y)=(\lambda\cdot x\mathcal{A},y)=(\lambda x,y\mathcal{A}^*)=(x,\lambda\cdot y\mathcal{A}^*)=(x,y(\lambda\mathcal{A}^*))$. Ez volt bizonyítandó.

5.5.5 Állítás: $(\mathcal{A}^*)^*=\mathcal{A}$, mert $(x\mathcal{A},y)=(x,y\mathcal{A}^*)=(y\mathcal{A}^*,x)=(y,x(\mathcal{A}^*)^*)=(x(\mathcal{A}^*)^*,y)$.

5.5.6 Állítás: $(\mathcal{A}\mathcal{B})^*=\mathcal{B}^*\mathcal{A}^*$, mert $(x\mathcal{A}\mathcal{B},y)=(x\mathcal{A},y\mathcal{B}^*)=(x,x\mathcal{B}^*\mathcal{A}^*)$.

5.6 Valós euklideszi tér, Cauchy-Bunyakovszkij egyenlőtlenség

5.6.1 Definíció: egy $B:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ szimmetrikus bilineáris függvény pozitív definit, ha $\forall x\neq 0: B(x,x)>0$; negatív definit, ha $\forall x\neq 0: B(x,x)<0$; pozitív szemidefinit, ha $\forall x: B(x,x)\geq 0$; negatív szemidefinit, ha $\forall x: B(x,x)\leq 0$. Ami egyik sem, az indefinit. **5.3.15** szerint egy pozitív definit mátrixa alkalmas bázisban **I**, egy negatív definité $-\mathbf{I}$; egy szemidefinit mátrixának átlójában ezenfelül 0-k is lehetnek.

5.6.2 Definíció: $x,y\in V$ elemek skalárszorzata alatt $B(x,y)$-t értjük, ahol B egy előre rögzített nem-elfajuló szimmetrikus bilineáris függvény. Jelölése (x,y).

5.6.3 Definíció: (valós) euklideszi tér egy V valós vektortér egy rajta értelmezett rögzített pozitív definittel.

5.6.4 Definíció: $(e_i)_{i=1}^n$ ortonormált bázis a V euklideszi térben, ha a skalárszorzás mátrixa $(e_i)_{i=1}^n$-ben **I**. (Ilyen biztosan van, ld. **5.6.1** ill. **5.3.15**.

5.6.5 Definíció: legyen V euklideszi tér. Ekkor $v\in V$ normája $\|v\|=\sqrt{(v,v)}$. A normára az alábbiak teljesülnek: **(1)** $\|0\|=0$, **(2)** $v\neq 0\Rightarrow\|v\|>0$, **(3)** $|\lambda|\cdot\|v\|$.

5.6.6 Cauchy-Bunyakovszkij egyenlőtlenség (CB): euklideszi térben $|(a,b)| \leq \|a\| \cdot \|b\|$ és egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha a és b lineárisan összefüggőek. (Ez végtelen dimenziós térben is igaz lesz, hiszen elég $\langle a,b \rangle$-re megszorítva belátni.)

Bizonyítás: ha b nullvektor, akkor az állítás igaz. Ha egyik sem nullvektor, akkor írjuk fel $(a,a)-2\lambda(a,b)+\lambda^2(b,b)=(a-\lambda b, a-\lambda b)\geq 0$-t $\lambda=\frac{(a,b)}{(b,b)}$-re és szorozzuk meg $(b,b)>0$-val. Kapjuk, hogy $(a,a)(b,b)-2(a,b)^2+(a,b)^2\geq 0 \Rightarrow (a,b)^2 \leq (a,a)(b,b)$. Mindkét oldal nemnegatív, tehát ennek vehetjük a négyzetgyökét, így pedig pont a bizonyítandó állítást kapjuk. Ha egyenlőség áll fenn, akkor $(a-\lambda b, a-\lambda b)=0 \Rightarrow a-\lambda b=0$, tehát a és b lineárisan összefüggnek.

5.6.7 Következmény: legyen $V=[0,1]$, azaz a $[0,1]\to\mathbb{R}$ folytonos függvények halmaza. Ez szemmel láthatóan vektortér $\mathbb{R}$ felett. V-n $(f,g)=\int_0^1 f(t)g(t)\mathrm{d}t$ szimmetrikus bilineáris függvény. Sőt, pozitív definit, mert $f\not\equiv 0 \Rightarrow \int_0^1 f^2(t)\mathrm{d}t>0$. (Ha f nem azonosan 0, akkor valahol $f^2(x)=2h>0$. Mivel $f^2(t)$ folytonos, x valamely δ sugarú környezetében $f^2(t)>h$, mindenütt másutt $f^2(t)\geq 0$, így az integrál értékét alulról becsüli $\delta\cdot h>0$.) **(CB)** szerint tehát $\left(\int_0^1 f(t)g(t)\mathrm{d}t\right)^2 \leq \left(\int_0^1 f^2(t)\mathrm{d}t\right)\cdot\left(\int_0^1 g^2(t)\mathrm{d}t\right)$.

5.6.8 Definíció: metrikus tér egy X halmaz és egy $\varrho: X\times X\to\mathbb{R}$ függvény, amelyre **(1)** $x\neq y \Rightarrow \varrho(x,y)>0$ és $\varrho(x,x)=0$, **(2)** $\varrho(x,y)=\varrho(y,x)$ és végül **(3)** $\varrho(x,y)+\varrho(y,z)\geq\varrho(x,z)$. Ekkor ϱ-t metrikának hívjuk.

5.6.9 Állítás (háromszög-egyenlőtlenség): tetszőleges euklideszi térben $\|x+y\| \leq \|x\|+\|y\|$.

Bizonyítás: a jobb oldal nemnegatív, elég tehát az egyenlőtlenség négyzetét belátni. A bal oldal négyzetébe beírva definícióját és becsülve $\|x+y\|^2=(x+y,x+y)=\|x\|^2+\|y\|^2+2(x,y)\leq\|x\|^2+\|y\|^2+2|(x,y)|$. **(CB)** szerint $\ldots\leq\|x\|^2+\|y\|^2+2\cdot\|x\|\cdot\|y\|=(\|x\|+\|y\|)^2$, ez volt bizonyítandó. Egyenlőség csak akkor teljesül, ha **(CB)**-ben egyenlőség áll fenn – azaz x és y lineárisan összefüggnek – és $(x,y)\geq 0$. Ez pontosan akkor teljesül, ha x és y egymás pozitív skalárszorosai vagy egyikük 0.

5.6.10 Következmény: euklideszi térben $\varrho(x,y)=\|x-y\|$ metrika.

5.6.11 Definíció: legyenek x,y a V euklideszi tér nem nulla elemei. Ekkor bezárt szögük az a $\varphi\in[0,\pi]$ szög, amelyre $\cos\varphi=\frac{(x,y)}{\|x\|\cdot\|y\|}$. Ez értelmes definíció, mert **(CB)** szerint a jobboldali kifejezés mindig $[-1,1]$-be esik.

5.6.12 Állítás: ha $\mathcal{A}$ mátrixa az $(e_i)_{i=1}^n$ ortonormált bázisban $\mathbf{A}$, $\mathcal{A}^*$ pedig $\mathbf{B}$, akkor $\mathbf{B}=\mathbf{A}^T$.

Bizonyítás: definíció szerint $e_i\mathcal{A}=\sum_{k=1}^n a_{ik}e_k$. Mivel (e_i) ortonormált, $(e_i\mathcal{A},e_k)=a_{ik}$. Hasonlóan $(e_i\mathcal{A}^*,e_k)=b_{ik}$. Ekkor $a_{ik}=(e_i\mathcal{A},e_k)=(e_i,e_k\mathcal{A}^*)=(e_k\mathcal{A}^*,e_i)=b_{ki}$. Ez volt bizonyítandó.

5.6.13 Definíció: legyen $\mathcal{A}$ a V euklideszi tér egy lineáris transzformációja. $\mathcal{A}$ szimmetrikus, ha egy ortonormált bázisban szimmetrikus a mátrixa. Ekkor **5.6.12** szerint $\mathcal{A}=\mathcal{A}^*$, azaz $\mathcal{A}$ mátrixa minden ortonormált bázisban szimmetrikus lesz.

5.7 Kvázi-lineáris és sesquilineáris függvények, komplex euklideszi tér

5.7.1 Definíció: legyenek V és W vektorterek a komplex test felett. A $Q: V\to V$ leképezés kvázi-lineáris, ha **(1)** $Q(v_1+v_2)=Q(v_1)+Q(v_2)$ és **(2)** $Q(\lambda\cdot v)=\bar{\lambda}\cdot Q(v)$.

5.7.2 Definíció: kvázi-lineáris függvény egy $V\to\mathbb{C}$ kvázi-lineáris leképezés.

5.7.3 Definíció: legyen V egy komplex test feletti vektortér. Ekkor $B: V\times V\to\mathbb{C}$ sesquilineáris függvény, ha $y_L: x\mapsto B(x,y)$ lineáris és $x_R: y\mapsto B(x,y)$ kvázi-lineáris, azaz:

(1) $\forall x_1,x_2,y\in V$: $B(x_1+x_2,y)=B(x_1,y)+B(x_2,y)$
(2) $\forall x,y_1,y_2\in V$: $B(x,y_1+y_2)=B(x,y_1)+B(x,y_2)$
(3) $\forall x,y\in V,\lambda\in\mathbb{C}$: $B(\lambda\cdot x,y)=\lambda\cdot B(x,y)$
(4) $\forall x,y\in V,\lambda\in\mathbb{C}$: $B(x,\lambda\cdot y)=\bar{\lambda}\cdot B(x,y)$

Ezek erősen hasonlítanak a bilineáris függvényekre. A problémamentesen átvihető, eddig csak bilineáris függvényekre definiált fogalmakat, bizonyított állításokat és tételeket használni fogjuk sesquilineáris függvényekre is.

5.7.4 Definíció: B sesquilineáris függvény Hermite-féle, ha $B(x,y)=\overline{B(x,y)}$. (Ez a szimmetrikus bilineáris függvény megfelelője.) Egy ilyenre nyilván $B(x,x)\in\mathbb{R}$.

5.7.5 Definíció: komplex vektortér felett a Hermite-féle függvényeket nevezzük skalárszorzatnak.

5.7.6 Definíció: komplex tér felett azokat a Hermite-féle függvényeket hívjuk pozitív definitnek, melyekre $v\neq 0 \Rightarrow (v,v)>0$. Komplex euklideszi tér avagy unitér tér egy komplex vektortér és felette egy rögzített pozitív definit. Egy ilyen térben v normája $\|v\|=\sqrt{(v,v)}$. A normára az alábbiak teljesülnek: **(1)** $\|0\|=0$, **(2)** $v\neq 0 \Rightarrow \|v\|>0$, **(3)** $|\lambda|\cdot\|v\|$.

5.7.7 Tétel: komplex euklideszi térben is igaz **(CB)** $|(a,b)|\leq\|a\|\cdot\|b\|$ és egyenlőség csak lineáris összefüggőség esetén áll fenn.

Bizonyítás: ha b nullvektor, akkor az állítás igaz. Ha nem, akkor írjuk fel $\lambda=\frac{(a,b)}{(b,b)}$-re $(a,a)-\lambda(b,a)-\overline{\lambda}(a,b)+\lambda\overline{\lambda}(b,b)=(a-\lambda b,a-\lambda b)\geq 0$-t és szorozzuk meg $(b,b)>0$-val. Kapjuk, hogy

$$(a,a)(b,b)-(a,b)(b,a)-\overline{(a,b)}(a,b)+(a,b)\overline{(a,b)}=(a,a)(b,b)-(a,b)\overline{(a,b)}=\|a\|^2\cdot\|b\|^2-|(a,b)|^2\geq 0.$$

Ebből átrendezéssel és gyökvonással (mindkét oldal nemnegatív) kapjuk a bizonyítandó állítást. Egyenlőség ismét csak $(a+\lambda b)=0$ esetben lehetséges, ekkor a és b lineárisan összefüggőek.

5.7.8 Állítás: unitér térben $\|a+b\|\leq\|a\|+\|b\|$.

Bizonyítás: nyilván elég az egyenlőtlenség négyzetét belátni, hiszen mindkét oldal nemnegatív valós.

$$(a+b,a+b)=(a,a)+(b,b)+(a,b)+\overline{(a,b)}=\|a\|^2+\|b\|^2+2\cdot\mathbf{Re}(a,b)\leq\|a\|^2+\|b\|^2+2|(a,b)|\leq\|a\|^2+\|b\|^2+2\|a\|\cdot\|b\|$$

(felhasználva **(CB)**-t) épp a bizonyítandó állítást adja.

5.7.9 Következmény: ha V unitér tér, akkor $\varrho(x,y)=\|x-y\|$ metrika V-n.

5.7.10 Állítás: ha a V unitér térben $(e_i)_{i=1}^k$ páronként merőleges nem nulla vektorok, akkor lineárisan függetlenek.

Bizonyítás: legyen $\sum_{i=1}^n\alpha_i e_i=0$ és lássuk be, hogy $\forall j\colon \alpha_j=0$. Vegyük észre, hogy $0=(0,e_j)=((\sum_{i=1}^n\alpha_i e_i),e_j)=\alpha_j\cdot B(e_j,e_j)$, mert az $i\neq j$-hez tartozó tagok 0-k. Mivel unitér térben vagyunk, $(e_j,e_j)\neq 0$, azaz $\alpha_j=0$. Ezzel az állítást beláttuk.

5.7.11 Állítás: ha V unitér térben $(e_i)_{i=1}^k$ páronként merőleges nem nulla vektorok, akkor kiegészíthetőek ortogonális bázissá.

Bizonyítás: vegyünk addig hozzá merőleges nem nulla elemeket, amíg lehet, azaz amíg már nincs V-ben több nem nulla vektor, ami az összes eddigire merőleges. Legyen ez a maximális ortogonális rendszer $(e_i)_{i=1}^m$. **5.7.10** szerint ez lineárisan független; már csak azt kell belátnunk, hogy generálja V-t. Legyen $x\in V$ tetszőleges, $\lambda_i=\frac{(x,e_i)}{(e_i,e_i)}$, $y=\sum_{i=1}^m\lambda_i e_i$. Ekkor $\forall i\colon (y,e_i)=(x,e_i)$, azaz $x-y$ merőleges a bázis összes eddigi elemére. Ha nem vehetjük hozzá $(e_i)_{i=1}^m$-hez, akkor nullvektor, tehát $x=y$. Eszerint V minden eleme felírható az e_i-k lineáris kombinációjaként.

5.7.12 Állítás: ha V unitér, akkor van benne ortonormált bázis. Ugyanis **5.7.11** szerint található V-ben $(f_i)_{i=1}^n$ ortogonális bázis. Ekkor az $e_i=\|f_i\|^{-1}\cdot f_i$ vektorokból álló bázis ortonormált lesz, hiszen $\|e_i\|=\|f_i\|^{-1}\cdot\|f_i\|=1$.

5.7.13 Következmény: minden n-dimenziós komplex euklideszi tér izomorf, hiszen minden pozitív definit sesquilineáris függvény mátrixa alkalmas bázisban **I**. Ebben $(\sum_{i=1}^n\alpha_i e_i,\sum_{i=1}^n\beta_i e_i)=\sum_{i=1}^n\alpha_i\overline{\beta}_i$.

5.8 Adjungálás unitér térben. Normális, önadjungált és unitér transzformációk

5.8.1 Állítás: legyen V-n a skalárszorzás Hermite-féle függvény. Ekkor **(1)** minden $f\in V^*$ lineáris függvényre pontosan egy olyan $v\in V$ van, amelyre a $v_L\colon x\longmapsto V(x,v)$ lineáris függvény éppen f. Hasonlóan **(2)** pontosan egy $u\in V$-re lesz $\overline{u_R}\colon x\longmapsto\overline{(u,x)}$ éppen f. Bizonyítása azonos **5.5.1** bizonyításával.

5.8.2 Definíció: legyen V-n a skalárszorzás nem-elfajuló sesquilineáris függvény, $\mathcal{A}\in Hom(V,V)$. **5.8.1** szerint minden egyes $y\in V$-re pontosan egy olyan $u\in V$ van, amelyre az $x\longmapsto(x\mathcal{A},y)$ lineáris függvény azonos $x\longmapsto(x,u)$-val. Legyen $\mathcal{A}^*$ az a leképezés, amely y-hoz u-t rendeli.

5.8.3 Állítás: $\mathcal{A}^*$ lineáris transzformáció.

Bizonyítás: $(y_1+y_2)\mathcal{A}^*=y_1\mathcal{A}^*+y_2\mathcal{A}^*$ ugyanúgy bizonyítható, mint **5.5.3**-ban. $(\lambda y)\mathcal{A}^*=\lambda\cdot(y\mathcal{A}^*)$ pedig abból következik, hogy $(x,(\lambda y)\mathcal{A}^*)=(x\mathcal{A},\lambda y)=\bar{\lambda}(x\mathcal{A},y)=\bar{\lambda}(x,y\mathcal{A}^*)=(x,\lambda\cdot(y\mathcal{A}^*))$.

5.8.4 Állítás: az adjungálás $*:\mathcal{A}\mapsto\mathcal{A}^*$ kvázi-lineáris leképezés.

$$(x,y(\mathcal{A}_1+\mathcal{A}_2)^*)=(x(\mathcal{A}_1+\mathcal{A}_2),y)=(x\mathcal{A}_1+x\mathcal{A}_2,y)=(x\mathcal{A}_1,y)+(x\mathcal{A}_2,y)=(x,y\mathcal{A}_1^*)+(x,y\mathcal{A}_2^*)=(x,y(\mathcal{A}_1^*+\mathcal{A}_2^*)) \quad \text{és}$$
$$(x,y(\lambda\mathcal{A})^*)=(x(\lambda\mathcal{A}),y)=(\lambda\cdot x\mathcal{A},y)=\lambda\cdot(x,y\mathcal{A}^*)=(x,\bar{\lambda}\cdot y\mathcal{A}^*)=(x,y(\bar{\lambda}\cdot\mathcal{A}^*)).$$

5.8.5 Állítás: $(\mathcal{A}^*)^*=\mathcal{A}$, mert $(x\mathcal{A},y)=(x,y\mathcal{A}^*)=\overline{(y\mathcal{A}^*,x)}=\overline{(y,x(\mathcal{A}^*)^*)}=(x(\mathcal{A}^*)^*,y)$.

5.8.6 Állítás: $(\mathcal{A}\mathcal{B})^*=\mathcal{B}^*\mathcal{A}^*$, mert $(x\mathcal{A}\mathcal{B},y)=(x\mathcal{A},y\mathcal{B}^*)=(x,y\mathcal{B}^*\mathcal{A}^*)$.

5.8.7 Állítás: legyen $(e_i)_{i=1}^n$ ortonormált bázis a V komplex euklideszi térben. Legyen az $\mathcal{A}$ lineáris transzformáció mátrixa (e_i)-ben **A**, adjungáltjáé **B**. Ekkor $\mathbf{B}=\bar{\mathbf{A}}^T$.

Bizonyítás: definíció szerint $e_i\mathcal{A}=\sum_{k=1}^n a_{ik}e_k$ és $e_i\mathcal{A}^*=\sum_{k=1}^n b_{ik}e_k$. Ezt beírva $(e_i\mathcal{A},e_j)=(e_i,e_j\mathcal{A}^*)$-ba és kihagyva a merőleges skalárszorzatokból kapott 0 tagokat $(a_{ij}e_j,e_j)=(e_i,b_{ji}e_i)$, azaz $a_{ij}=a_{ij}(e_j,e_j)=\bar{b}_{ji}(e_i,e_i)=\bar{b}_{ji}$.

5.8.8 Definíció: a V komplex euklideszi tér feletti $\mathcal{A}$ lineáris transzformáció önadjungált, ha $\mathcal{A}=\mathcal{A}^*$. Ez **5.8.7** alapján ekvivalens azzal, hogy mátrixa bármely ortonormált bázisban a transzponáltjának konjugáltja.

5.8.9 Definíció: legyen V komplex euklideszi tér. $\mathcal{A}\in Hom(V,V)$ unitér, ha $\mathcal{A}^*\mathcal{A}=\mathcal{I}$.

5.8.10 Definíció: legyen V komplex euklideszi tér. $\mathcal{A}\in Hom(V,V)$ normális, ha $\mathcal{A}^*\mathcal{A}=\mathcal{A}\mathcal{A}^*$. Nyilván minden önadjungált és minden unitér transzformáció normális.

5.8.11 Állítás: legyen $\mathcal{A}\in Hom(V,V)$ normális transzformációnak v sajátvektora λ sajátértékkel. Ekkor $\mathcal{A}$ adjungáltjának is sajátvektora v, mégpedig $\bar{\lambda}$ sajátértékkel.

Bizonyítás: $v(\mathcal{A}-\lambda\cdot\mathcal{I})=0$ tehát $\boxdot$ $0=(v(\mathcal{A}-\lambda\cdot\mathcal{I}),v(\mathcal{A}-\lambda\cdot\mathcal{I}))=(v,v(\mathcal{A}-\lambda\cdot\mathcal{I})(\mathcal{A}-\lambda\cdot\mathcal{I})^*)$. Felhasználva, hogy az adjungálás kvázi-lineáris: $(\mathcal{A}-\lambda\cdot\mathcal{I})(\mathcal{A}-\lambda\cdot\mathcal{I})^*=(\mathcal{A}-\lambda\cdot\mathcal{I})(\mathcal{A}^*-\bar{\lambda}\cdot\mathcal{I})$. Ezt kifejtve minden tag egy olyan kéttényezős szorzat lesz, ahol a tényezők felcserélhetőek, mert vagy egyikük $\mathcal{I}$, vagy a szorzat $\mathcal{A}\mathcal{A}^*$, ami azért felcserélhető, mert $\mathcal{A}$ normális. Így az egész szorzat felcserélhető, azaz $(\mathcal{A}-\lambda\cdot\mathcal{I})(\mathcal{A}^*-\bar{\lambda}\cdot\mathcal{I})=(\mathcal{A}^*-\bar{\lambda}\cdot\mathcal{I})(\mathcal{A}-\lambda\cdot\mathcal{I})=(\mathcal{A}^*-\bar{\lambda}\cdot\mathcal{I})(\mathcal{A}^*-\bar{\lambda}\cdot\mathcal{I})^*$. Ezt visszaírva $\boxdot$-be $0=(v,v(\mathcal{A}^*-\bar{\lambda}\cdot\mathcal{I})(\mathcal{A}^*-\bar{\lambda}\cdot\mathcal{I})^*)=(v(\mathcal{A}^*-\bar{\lambda}\cdot\mathcal{I}),v(\mathcal{A}^*-\bar{\lambda}\cdot\mathcal{I}))$. V euklideszi tér, tehát ebből következik $v(\mathcal{A}^*-\bar{\lambda}\cdot\mathcal{I})=0$, a bizonyítandó állítás.

5.8.12 Következmény: önadjungált transzformáció minden sajátértéke valós, hiszen ha v sajátvektor λ sajátértékkel, akkor $\bar{\lambda}$ sajátértékkel is, tehát $\lambda=\bar{\lambda}$.

5.8.13 Állítás: $\mathcal{A}$ unitér transzformáció minden sajátértékének abszolútértéke 1.

Bizonyítás: $v\mathcal{A}=\lambda v \Rightarrow \lambda\bar{\lambda}\cdot(v,v)=(v\mathcal{A},v\mathcal{A})=(v,v\mathcal{A}\mathcal{A}^*)=(v,v)$. Mivel $(v,v)\neq 0$, ebből következik $\lambda\bar{\lambda}=|\lambda|^2=1$.

5.8.14 Állítás: $\mathcal{A}$ pontosan akkor unitér, ha $\forall x,y\in V$: $(x\mathcal{A},y\mathcal{A})=(x,y)$, azaz egy komplex euklideszi tér önmagára vett lineáris izometriái épp az unitér transzformációk.

Bizonyítás: ha $\mathcal{A}$ unitér, akkor $(x\mathcal{A},y\mathcal{A})=(x,y\mathcal{A}\mathcal{A}^*)=(x,y)$. Ha pedig $\forall x,y\in V:(x,y)=(x\mathcal{A},y\mathcal{A})$, akkor $\forall y\in V$-re megegyeznek az $x\mapsto(x,y\mathcal{A}\mathcal{A}^*)$ és az $x\mapsto(x,y)$ lineáris függvények. Ekkor **5.8.1** szerint $\forall y\in V$: $y=y\mathcal{A}\mathcal{A}^*$, tehát $\mathcal{A}\mathcal{A}^*=\mathcal{I}$.

5.8.15 Következmények: **(1)** $\mathcal{I}$ unitér; **(2)** ha $\mathcal{A}_1$ és $\mathcal{A}_2$ unitér, akkor $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2$ is; **(3)** ha $\mathcal{A}$ unitér, akkor $\mathcal{A}^{-1}$ is.

5.8.16 Állítás:

(1) $\mathcal{I}$ önadjungált.

(2) ha $\mathcal{A}_1$ és $\mathcal{A}_2$ önadjungált, akkor $\mathcal{A}_1+\mathcal{A}_2$ is, mert az adjungálás kvázi-lineáris transzformáció.

(3) ha $\mathcal{A}_1$ és $\mathcal{A}_2$ önadjungált, akkor $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2$ pontosan akkor önadjungált, ha $\mathcal{A}_1$ és $\mathcal{A}_2$ felcserélhető. Ugyanis ha felcserélhetőek, akkor $(\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2)^*=\mathcal{A}_2^*\mathcal{A}_1^*=\mathcal{A}_2\mathcal{A}_1=\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2$ és a szorzat valóban önadjungált, ha pedig a szorzat önadjungált, akkor $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2=(\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2)^*=\mathcal{A}_2^*\mathcal{A}_1^*=\mathcal{A}_2\mathcal{A}_1$, valóban felcserélhetőek.

5.8.17 Állítás: ha $\mathcal{A}$ minden elem normáját megtartja a V euklideszi térben, akkor $\forall x,y\in V$: $(x\mathcal{A},y\mathcal{A})=(x,y)$.

Bizonyítás: $(x+\lambda y,x+\lambda y)=(x\mathcal{A}+(\lambda y)\mathcal{A},x\mathcal{A}+(\lambda y)\mathcal{A})$. Kivonva $(x,x)+(\lambda y,\lambda y)=(x\mathcal{A},x\mathcal{A})+((\lambda y)\mathcal{A},(\lambda y)\mathcal{A})$-t kapjuk, hogy $(x,\lambda y)+(\lambda y,x)=(x\mathcal{A},(\lambda y)\mathcal{A})+((\lambda y)\mathcal{A},x\mathcal{A})$, azaz $\bar{\lambda}(x,y)+\lambda(y,x)=\bar{\lambda}(x\mathcal{A},y\mathcal{A})+\lambda(y\mathcal{A},x\mathcal{A})$. Ebbe behelyettesítve valós esetben

$\lambda=1$-et, komplex esetben ezenkívül $\lambda=i$-t és felhasználva, hogy $(x,y)=\overline{(y,x)}$, némi számolással a bizonyítandó állítást kapjuk.

5.8.18 Állítás: legyen V komplex euklideszi tér. Ekkor tetszőleges $\mathcal{A}$ V feletti lineáris transzformáció előáll $\mathcal{A}=\mathcal{A}_1+i\cdot\mathcal{A}_2$ alakban, ahol $\mathcal{A}_1$ és $\mathcal{A}_2$ önadjungáltak. Ugyanis $\mathcal{A}_1=\frac{1}{2}(\mathcal{A}+\mathcal{A}^*)$, $\mathcal{A}_2=\frac{1}{2}i\cdot(\mathcal{A}^*-\mathcal{A})$ jó lesz.