8. Kategóriák, funktorok

8.1 Kategóriák

8.1.1 Definíció: kategória egy olyan $\mathcal{C}$ struktúra, amely objektumokból és morfizmusokból áll.

Az objektumok egy $Ob\,\mathcal{C}$ nevű dologban (halmazelméleti elnevezése: osztály) vannak; lehetnek több, mint halmaznyian és semmiféle megkötés nincs rájuk. Minden $A,B\in Ob\,\mathcal{C}$-re létezik egy $hom(A,B)$ halmaz. Morfizmusoknak ezen halmazok elemeit nevezzük. Az alábbi tulajdonságokkal rendelkeznek:

(C1) $hom(A,B)\cap hom(A',B')=\emptyset$, kivéve az $A=A', B=B'$ esetet (tehát minden morfizmus egy jól meghatározott rendezett objektumpárhoz tartozik).

(C2) $f\in hom(A,B), g\in hom(C,D)$ morfizmusokhoz pontosan $B=C$ esetén létezik egy $gf\in hom(A,D)$ morfizmus, amelyet a két morfizmus szorzatának, esetleg kompozíciójának hívunk.

(C3) $f\in hom(A,B), g\in hom(B,C), h\in hom(C,D)$ esetén $h(gf)=(hg)f$, tehát ahol van értelme asszociativitásról beszélni, ott teljesül.

(C4) $\forall A\in Ob\,\mathcal{C}\ \exists 1_A\in hom(A,A)\forall B\in Ob\,\mathcal{C}$: $(\forall f\in hom(A,B): f1_A=f$ és $\forall g\in hom(B,A): 1_A g=g$, tehát minden objektumhoz tartozik egy olyan A-ból A-ba menő morfizmus, amely az A-ból induló és az A-ba menő morfizmusokra nézve egységelemként viselkedik (ez nyilván egyértelmű).

Vegyük észre, hogy $A\neq B$ esetén $hom(A,B)$ nyugodtan lehet $\emptyset$, de $|hom(A,A)|\geq|\{1_A\}|=1$.

$\varphi\in hom(A,B)$-re gyakran a $\varphi: A\to B$ jelöléssel utalunk.

Példák:

– a $\mathcal{Set}$ kategória objektumai a halmazok, morfizmusai a leképezések.

– $\mathcal{Fin}$ objektumai a véges csoportok, morfizmusai a köztük futó homomorfizmusok.

– $\mathcal{Gr}$ objektumai a csoportok, morfizmusai a homomorfizmusok.

– $\mathcal{Ab}$ objektumai az Abel-csoportok, morfizmusai a homomorfizmusok.

– $\mathcal{Top}$ objektumai a topologikus terek, morfizmusai a folytonos leképezések.

– legyen M egy monoid, más néven egységelemes félcsoport. Legyen $Ob\,\mathcal{C}=\{M\}$ és $hom(M,M)=M$. Így egy kategóriát kapunk.

– legyen $(H,\leq)$ egy részbenrendezett halmaz. Definiáljuk a $\mathcal{C}$ kategóriát úgy, hogy $Ob\,\mathcal{C}=H$ és ha $a\leq b$, akkor $|hom(a,b)|=1$, különben $hom(a,b)=\emptyset$. A részbenrendezés tranzitivitása miatt tudjuk definiálni a szorzást és el sem tudjuk kerülni, hogy az asszociatív legyen. A reflexivitás miatt $hom(a,a)$ nem üres és egyetlen eleme menthetetlenül lokális egységelem.

– legyen R egységelemes gyűrű. Ekkor ${}_RM$ ill. M_R objektumai az R feletti bal- ill. jobboldali modulusok, morfizmusai a homomorfizmusok.

8.1.2 Definíció: az $\mathcal{A}$ kategória részkategóriája $\mathcal{B}$-nek, ha **(1)** $Ob\,\mathcal{A}\subseteq Ob\,\mathcal{B}$ (részosztálya; a bal oldal minden eleme eleme a jobb oldalnak is) és **(2)** $\forall C,D\in Ob\,\mathcal{A}$: $hom_{\mathcal{A}}(C,D)\subseteq hom_{\mathcal{B}}(C,D)$. Jelölése $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{B}$. Ha **(2)**-nél mindig egyenlőség teljesül, akkor teljes részkategóriáról beszélünk. Például $\mathcal{Ab}$ teljes részkategóriája $\mathcal{Gr}$-nek, nem teljes részkategóriája $\mathcal{Set}$-nek.

8.1.3 Definíció: $\varphi\in hom(A,B)$ izomorfizmus (röviden izo), ha $\exists\varphi^{-1}\in hom(B,A)$: $(\varphi\varphi^{-1}=1_B$ és $\varphi^{-1}\varphi=1_A)$, azaz ha van inverze. Könnyen látható, hogy ha létezik inverz, akkor egyértelmű. 1_A mindig izomorfizmus és izomorfizmusok szorzata, inverze izomorfizmus.

8.1.4 Definíció: A és B izomorfak a $\mathcal{C}$ kategóriában, ha található $\varphi: A\to B$ izomorfizmus. Ez egy ekvivalenciareláció $Ob\,\mathcal{C}$. Jelölése $A\simeq B$.

8.1.5 Definíció: $\mathcal{C}$ kategória oppozit kategóriája az a $\mathcal{C}^{op}$, melynek objektumai megegyeznek $Ob\,\mathcal{C}$ elemei, morfizmusai pedig $\mathcal{C}$ morfizmusainak megfordításai, azaz $hom_{\mathcal{C}^{op}}(A,B)=hom_{\mathcal{C}}(B,A)$ és az α,β $\mathcal{C}^{op}$-beli morfizmusok $\beta\alpha$ szorzata pontosan akkor definiált, ha $\mathcal{C}$-ben $\exists\alpha\beta$ és ekkor ezzel egyenlő. Nyilván a $\mathcal{C}^{op}$-beli szorzás is asszociatív és $\forall A\in Ob\,\mathcal{C}^{op}$-ra a $\mathcal{C}$-beli 1_A $\mathcal{C}^{op}$-ban is lokális egység. Ez tehát valóban kategória.

8.1.6 Definíció: a $\mathcal{C}$ kategóriában a $\varphi \in hom(A,B)$ morfizmus mono(morfizmus), ha $\forall C \in Ob\,\mathcal{C}\, \forall \alpha,\beta \in hom(C,A)$: $(\varphi\alpha = \varphi\beta \Rightarrow \alpha = \beta)$. Epi(morfizmus), ha $\forall D \in Ob\,\mathcal{C}\, \forall \alpha,\beta \in hom(B,D)$: $(\alpha\varphi = \beta\varphi \Rightarrow \alpha = \beta)$. Ezek nyilván duális fogalmak ($\mathcal{C}$ monomorfizmusai éppen $\mathcal{C}^{op}$ epimorfizmusai).

8.1.7 Megjegyzés: ha $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$ és $\mathcal{C}'$ egy morfizmusa $\mathcal{C}$-ben mono- ill. epimorfizmus, akkor $\mathcal{C}'$-ben is, mert a definíció feltételei öröklődnek.

8.1.8 Állítás: ***Set*** monomorfizmusai az injektív, epimorfizmusai a szürjektív leképezések.

Bizonyítás: legyen először $\varphi: A \to B$ injektív, $\alpha,\beta: C \to A$ és $\varphi\alpha = \varphi\beta$. $\forall x \in C$: $\varphi(\alpha(x)) = (\varphi\alpha)(x) = (\varphi\beta)(x) = \varphi(\beta(x))$. φ injektivitása miatt ebből következik $\forall x \in C$: $\alpha(x) = \beta(x)$, tehát $\alpha = \beta$. Ha $\varphi: A \to B$ nem injektív, akkor $\exists a, a' \in A$, hogy $a \neq a'$ de $\varphi(a) = \varphi(a')$. Ekkor $C = \{x\}$, $\alpha: x \mapsto a$, $\alpha: x \mapsto a'$ választással $\alpha \neq \beta$ de $\varphi\alpha = \varphi\beta = (x \mapsto \varphi(a))$, tehát φ nem epimorfizmus. A másik állítás hasonlóan bizonyítható.

8.1.9 Állítás: ha φ izomorfizmus, akkor epimorfizmus és monomorfizmus.

Bizonyítás: minthogy az izomorfizmus definíciója önmaga duálisa, elég belátni, hogy φ monomorfizmus. Legyen $\varphi^{-1}\varphi = 1_A$ és $\varphi\alpha = \varphi\beta$. Ekkor az asszociativitás miatt $\alpha = 1_A\alpha = \varphi^{-1}(\varphi\alpha) = \varphi^{-1}(\varphi\beta) = 1_A\beta = \beta$.

Megjegyzés: az állítás megfordítása nem minden kategóriában igaz (tehát egy epi- és monomorfizmus nem feltétlenül izomorfizmus).

8.1.10 Állítás: ${}_R\mathcal{M}$-ben a monomorfizmusok az injektív homomorfizmusok.

Bizonyítás: ha a $\varphi: M \to N$ injektív leképezés morfizmusa ${}_R\mathcal{M}$-nek, akkor ${}_R\mathcal{M} \subseteq \mathcal{S}et$ miatt monomorfizmus.

Ha φ nem injektív, akkor magja nem $\{0\}$, tehát van két különböző m és m' eleme. Legyen C az ${}_RR$ szabad modulus és legyen az α,β: ${}_RR \to M$ homomorfizmusokra $\alpha(1) = m$ és $\beta(1) = m'$ (mindkét egyenlőség egyértelműen meghatároz egy ${}_RR \to \langle m \rangle \leq Ker\,\varphi$ ill. egy ${}_RR \to \langle m' \rangle \leq Ker\,\varphi$ homomorfizmust). Ezekre $\varphi\alpha = \varphi\beta = 0$, hiszen $Im\,\alpha, Im\,\beta \leq Ker\,\varphi$. Viszont $\alpha \neq \beta$, tehát φ nem monomorfizmus.

8.1.11 Állítás: ${}_R\mathcal{M}$ epimorfizmusai a szürjektív homomorfizmusok.

Bizonyítás: ${}_R\mathcal{M} \subseteq \mathcal{S}et$ miatt minden szürjektív homomorfizmus epimorfizmus. Ha $\varphi: M \to N$ nem szürjektív, azaz $Im\,\varphi < N$, akkor α-nak az $N \to N/Im\,\varphi$ természetes homomorfizmust, β-nak az $N \to N/Im\,\varphi$ nullhomomorfizmust választva $\alpha \neq \beta$, de $\alpha\varphi = \beta\varphi = 0$.

Következmény: ${}_R\mathcal{M}$ izomorfizmusai a bijektív homomorfizmusok (persze be kell még látni, hogy ezek valóban izomorfizmusok, de ez triviális).

8.1.12 Definíció: $A \in Ob\,\mathcal{C}$ kezdőobjektum, ha $\forall B \in Ob\,\mathcal{C}$: $|hom(A,B)| = 1$; végobjektum, ha $\forall C \in Ob\,\mathcal{C}$: $|hom(C,A)| = 1$. Zéróobjektum, ha mindkét feltétel teljesül.

8.1.13 Állítás: legyen Z és Z' zéróobjektum $\mathcal{C}$-ben. Ekkor Z és Z' izomorfak, továbbá tetszőleges A, B objektumokra és az $\alpha: A \to Z$, $\alpha': A \to Z'$, $\beta: Z \to B$, $\beta': Z' \to B$ morfizmusokra $\beta\alpha = \beta'\alpha'$.

Bizonyítás: legyen φ az egyetlen $Z \to Z'$ morfizmus, φ^{-1} pedig az egyetlen $Z' \to Z$ morfizmus. Ekkor $\varphi\varphi^{-1}$ az egyetlen $Z' \to Z'$ morfizmus, tehát $1_{Z'}$ és hasonlóan $\varphi^{-1}\varphi = 1_Z$, így ezek egymás inverzei $\Rightarrow$ φ izomorfizmus.

$\beta\alpha = \beta(\varphi^{-1}\varphi)\alpha = (\beta\varphi^{-1})(\varphi\alpha)$. Az első tényező $hom(Z',B)$ eleme, tehát β', a másik tényező hasonlóan α'. Ezzel beláttuk hogy értelmes (nem függ a zéróobjektum választásától) az alábbi definíció:

8.1.14 Definíció: legyen a $\mathcal{C}$ kategóriában Z zéróobjektum. Ekkor $A, B \in Ob\,\mathcal{C}$-re az (A,B) zérómorfizmus az a $\beta\alpha$ morfizmus, melyben $\alpha \in hom(A,Z)$ és $\beta \in hom(Z,B)$.

Példa: $\mathcal{G}r$ zéróobjektuma $\{1\}$, a $G \to H$ zérómorfizmus pedig az a homomorfizmus, ami G minden eleméhez H egységét rendeli. ***Set***-ben az egyelemű halmazok végobjektumok, $\emptyset$ kezdőobjektum.

8.2 Funktorok

8.2.1 Definíció: T kovariáns funktor a $\mathcal{C}$ kategóriából a $\mathcal{D}$ kategóriába, ha teljesíti az alábbiakat:

(1) T minden $A \in Ob\,\mathcal{C}$-hez $Ob\,\mathcal{D}$ egy $T(A)$ elemét rendeli,

(2) T minden $A, B \in Ob\,\mathcal{C}$-re minden $\varphi \in hom(A,B)$-hez $hom(T(A), T(B))$ egy $T(\varphi)$ elemét rendeli,

(3) $\mathcal{C}$ minden α,β morfizmusára, amelyre $\beta\alpha$ értelmezve van, $T(\beta\alpha)=T(\beta)T(\alpha)$,

(4) $\forall A\in Ob\,\mathcal{C}$: $T(1_A)=1_{T(A)}$.

Kontravariáns funktor, ha teljesül rá **(1)**, **(4)**, továbbá

(2′) T minden $A,B\in Ob\,\mathcal{C}$-re minden $\varphi\in hom(A,B)$-hez $hom\big(T(B),T(A)\big)$ egy $T(\varphi)$ elemét rendeli,

(3′) $\mathcal{C}$ minden α,β morfizmusára, amelyre $\beta\alpha$ értelmezve van, $T(\beta\alpha)=T(\alpha)T(\beta)$.

Látható, hogy $id_{\mathcal{C}}:\mathcal{C}\to\mathcal{C}$ kovariáns funktor, míg a $\mathcal{C}\to\mathcal{C}^{op}$ „identitás" kontravariáns funktor. Két ko- vagy kontravariáns funktor kompozíciója kovariáns, egy ilyen és egy olyan kompozíciója kontravariáns funktor.

Példa: legyen $M_0\in{}_R\mathcal{M}$ rögzített. T minden ${}_RM$ modulushoz rendelje hozzá $Hom_R(M_0,M)$-et (ez az $M_0\to M$ homomorfizmusok halmaza; maga is baloldali R-modulus). Ily módon egyelőre egy $Ob\,{}_R\mathcal{M}\to Ob\,{}_R\mathcal{M}$ hozzárendelést kapunk. A $\varphi\in hom(M,N)$ ${}_R\mathcal{M}$-beli morfizmushoz rendelje T azt a $Hom_R(M_0,M)\to Hom_R(M_0,N)$ leképezést, amely a $\vartheta\in T(M)=\{M_0\to M\}$ homomorfizmushoz a $\varphi\circ\vartheta\in T(N)=\{M_0\to N\}$ homomorfizmust rendeli. Ez modulus-homomorfizmus lesz (azaz $\varphi_T=T(\varphi)$ jelöléssel $\varphi_T(r\vartheta+s\xi)=\varphi\circ(r\vartheta+s\xi)=r\cdot(\varphi\circ\vartheta)+s\cdot(\varphi\circ\vartheta)=r\cdot\varphi_T(\vartheta)+s\cdot\varphi_T(\xi)$), tehát T az ${}_R\mathcal{M}$ kategória objektumaihoz és morfizmusainhoz ${}_R\mathcal{M}$ objektumait rendeli.

$\varphi\in hom(M,N)$ esetén $T(\varphi)\in hom\big(T(M),T(N)\big)$, mert úgy definiáltuk. Némi számolással adódik, hogy T teljesíti a **8.2.1.1**,**3** és **4** feltételeket is, tehát kovariáns funktor ${}_R\mathcal{M}$-ből ${}_R\mathcal{M}$-be, vagy – ha az szimpatikusabb – $\mathcal{Ab}$-be, hiszen ${}_R\mathcal{M}\subseteq\mathcal{Ab}$.

Ha $T(M)$-nek $Hom_R(M,M_0)$-t választottuk volna, $\varphi\in hom(M,N)$ esetén $T(\varphi)$-nek pedig azt a $Hom_R(N,M_0)\to Hom_R(M,M_0)$ leképezést, ahol $\vartheta:N\to M_0$ ($\vartheta\in T(N)$) képe $\varphi_T(\vartheta)=\vartheta\circ\varphi$, akkor kontravariáns funktort kaptunk volna.

8.3 Objektumok szorzata, összege

8.3.1 Definíció: diagramnak nevezünk egy $\mathcal{C}$ kategória néhány – nem feltétlenül különböző – objektumának és morfizmusának D halmazát illetve annak ábráját, ahol minden D-beli morfizmus valamely két D-beli objektum (egy-egy meghatározott példánya) között fut.

Egy diagramot úgy ábrázolunk, hogy lerajzolunk szimbólumokat, melyek a D-beli objektumoknak felelnek meg (a többször szereplők több szimbólumot kapnak), majd e szimbólumok közé a morfizmusoknak megfelelő nyilakat, melyeken jelöljük, hogy mely morfizmusnak felelnek meg. Egy $\varphi\in hom(A,B)$-hez tartozó nyíl az A objektum (megfelelő példányának) szimbólumától a B objektum (megfelelő példányához) szimbólumához vezet.

$A\xrightarrow{\alpha}B\xrightarrow{\beta}C$ például a $D_1=\{A,B,C,\alpha,\beta\}$ diagram (ábrája), ahol $\alpha\in hom(A,B),\beta\in hom(B,C)$ és mindenkiből egyetlen példány van. Ha félreértés veszélye nem fenyeget (pl. nem kell többszörösen szereplő elemekre figyelni), akkor a diagramoknak csak a morfizmusait fogom felsorolni, a szükséges objektumok beleértendőek. Így a fenti diagramot $\{\alpha,\beta\}$ is jelölheti.

Hogy valami többször szerepelhessen, arra például a kommutativitás (ld. következő pont) miatt van szükség. Ugyanis a D_2: $A\underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightleftarrows}}B$ diagram nem mindig kommutatív, míg ugyanezen objektumokra és morfizmusokra D_3: $A\xrightarrow{\alpha}B\xrightarrow{\beta}A$ mindig az.

8.3.2 Definíció: a D diagram kommutatív, ha teljesül, hogy ha a D-beli $\alpha_n\alpha_{n-1}\ldots\alpha_2\alpha_1$ és $\beta_k\beta_{k-1}\ldots\beta_2\beta_1$ szorzatok ugyanott kezdődnek és ugyanott végződnek, akkor azonosak. (Egy $\gamma_m\gamma_{m-1}\ldots\gamma_2\gamma_1$ szorzatot akkor nevezünk D-belinek, ha $\forall i$: $\gamma_i\in D$ és γ_{i+1} rendre azon D-beli objektum megfelelő példányából indul, ahova γ_i mutat. A szorzat kezdete ill. vége azon objektum megfelelő példánya, ahonnan γ_1 indul ill. ahova γ_m mutat.) Ez az ábrán azt jelenti, hogy ha elkezdünk sétálni a nyilakon és a lépésekhez tartozó morfizmusok szorzatát nevezzük az úthoz tartozó morfizmusnak, akkor két azonos kezdő- és végponttal rendelkező úthoz ugyanaz a morfizmus tartozik.

A kommutativitás fogalmával a zérómorfizmusok definícióját lehetővé tévő **8.2.1** állítás úgy is megfogalmazható, hogy ha Z, Z' zéróobjektumok, akkor az alábbi diagram minden esetben kommutatív.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & Z' \arrow[d] \\ Z \arrow[r] & B \end{tikzcd}$$

8.3.3 Definíció: legyenek P, A_α $(\alpha\in\mathbf{I})$ objektumok a $\mathcal{C}$ kategóriában, továbbá $\forall\alpha\in\mathbf{I}$: $\pi_\alpha\in hom(P, A_\alpha)$. Ekkor P szorzata az A_α objektumoknak a π_α morfizmusokkal, ha tetszőleges $B\in Ob\,\mathcal{C}$, $\varphi_\alpha: B\to A_\alpha$ $(\alpha\in\mathbf{I})$ esetén pontosan egy olyan $\kappa: B\to P$ morfizmus található, amely $\forall\alpha\in\mathbf{I}$-re kommutatívvá teszi a $\{\kappa, \varphi_\alpha, \pi_\alpha\}$ diagramot (azaz $\exists!\kappa\in hom(B,P)$: $\forall\alpha\in\mathbf{I}$: $\pi_\alpha\kappa=\varphi_\alpha$). (A π_α jelölés a projekció szóból ered.)

Azt, hogy „létezik olyan morfizmus, amely kommutatívvá teszi az alábbi diagramo(ka)t", általában úgy jelöljük a diagram ábráján, hogy a keresett morfizmust szaggatott nyíllal jelöljük rajta. Gyakran azt is beleértjük, hogy létezik és egyértelmű. A szorzatnak tehát az alábbi diagram felel meg:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "\pi_\alpha"] & (\alpha\in\mathbf{I}) \\ B \arrow[ur, dashed, "\kappa"] \arrow[r, "\varphi_\alpha"'] & A_\alpha & \end{tikzcd}$$

Alternatív definíció: legyenek a $\mathcal{PC}$ kategória objektumai a $\left(B, \{\varphi_\alpha \mid \alpha\in\mathbf{I}, A_\alpha\in Ob\,\mathcal{C}, \varphi_\alpha\in hom(B, A_\alpha)\}\right)$ struktúrák, ahol $\mathcal{C}$ tetszőleges kategória. $hom\left((B,\{\varphi_\alpha\}),(B',\{\varphi'_\alpha\})\right)$ elemei legyenek azok az κ: $B\to B'$ $\mathcal{C}$-beli morfizmusok, melyek $\forall\alpha\in\mathbf{I}$ esetén kommutatívvá teszik a $\{\kappa, \varphi_\alpha, \varphi'_\alpha\}$ diagramot. Szorzatnak $\mathcal{PC}$ végobjektumait nevezzük. (Vegyük észre, hogy ez csak átfogalmazása a definíciónak.)

8.3.4 Állítás: ha a $\mathcal{C}$ kategóriában P szorzata az A_α objektumoknak a π_α morfizmusokkal és P' szorzata az A_α objektumoknak a π'_α morfizmusokkal, akkor $P\simeq P'$.

Bizonyítás: tekintsük az egyértelmű κ: $P\to P'$ és κ': $P'\to P$ morfizmusokat, melyek kommutatívvá teszik a definícióban szereplő diagramokat. Ekkor $\forall\alpha\in\mathbf{I}$: $(\pi_\alpha\kappa)\kappa'=\pi'_\alpha=\pi_\alpha$, tehát $\varepsilon=\kappa'\kappa$: $P\to P$ és $\varepsilon=1_P$ egyaránt kommutatívvá teszi az összes $\{\varepsilon, \pi_\alpha, \pi_\alpha\}$ diagramot. Alkalmazva $B=P, \varphi_\alpha=\pi_\alpha$ választással annak definícióját, hogy P szorzat, nyerjük, hogy $\kappa'\kappa=\varepsilon=1_P$. Hasonlóan $\kappa\kappa'=\varepsilon=1_{P'}$, tehát φ izomorfizmus.

Megengedhettük volna azt is, hogy P' az A'_α objektumok szorzata legyen a π'_α morfizmusokkal és $A_\alpha\simeq A'_\alpha$ teljesüljön.

8.3.5 Definíció: legyenek S, A_α $(\alpha\in\mathbf{I})$, objektumok a $\mathcal{C}$ kategóriában, továbbá $\forall\alpha\in\mathbf{I}$: $\pi_\alpha\in hom(A_\alpha, S)$. Ekkor S összege avagy ko-szorzata az A_α objektumoknak az ι_α morfizmusokkal, ha tetszőleges $D\in Ob\,\mathcal{C}$, $\psi_\alpha: A_\alpha\longrightarrow D$ $(\alpha\in\mathbf{I})$ esetén pontosan egy olyan $\kappa: S\to D$ morfizmus található, amely $\forall\alpha\in\mathbf{I}$ esetén kommutatívvá teszi $\{\kappa, \psi_\alpha, \iota_\alpha\}$ diagramot (azaz $\exists!\kappa\in hom(S,D)$: $\forall\alpha\in\mathbf{I}$: $\kappa\iota_\alpha=\psi_\alpha$. (A ι_α jelölés az injekció szóra utal.) Ez a szorzat duálisa. A megfelelő diagram:

$$\begin{tikzcd} P \arrow[dr, dashed, "\kappa"] & & (\alpha\in\mathbf{I}) \\ A_\alpha \arrow[u, "\iota_\alpha"] \arrow[r, "\psi_\alpha"'] & D & \end{tikzcd}$$

Alternatív definíció: legyenek az $\mathcal{SC}$ kategória objektumai a $\left(D, \{\psi_\alpha \mid \alpha\in\mathbf{I}, A_\alpha\in Ob\,\mathcal{C}, \psi_\alpha\in hom(A_\alpha, D)\}\right)$ struktúrák, ahol $\mathcal{C}$ tetszőleges kategória. $hom\left((D,\{\psi_\alpha\}),(D',\{\psi'_\alpha\})\right)$ elemei legyenek azok a $\psi: D\to D'$ $\mathcal{C}$-beli morfizmusok, melyek kommutatívvá teszik az összes $\{\kappa, \psi_\alpha, \psi'_\alpha\}$ diagramot. Összegnek $\mathcal{SC}$ kezdőobjektumait nevezzük.

8.3.6 Állítás: ha a $\mathcal{C}$ kategóriában S összege az A_α objektumoknak az ι_α morfizmusokkal és S' összege az A_α objektumoknak az ι'_α morfizmusokkal, akkor $S\simeq S'$. Ez **8.3.4** duálisa, ugyanúgy bizonyítható. Megengedhető, hogy S' a megfelelő A_α-val rendre izomorf A'_α objektumok szorzata legyen.

Hasonló számolással egyszerűen igazolható az alábbi két duális állítás:

8.3.7 Állítás: ha $(P, \{\pi_\alpha\})$ szorzat és $\varphi: P'\to P$ izomorfizmus, akkor $(P', \{\pi_\alpha\varphi\})$ is szorzat. Ha $(S, \{\iota_\alpha\})$ összeg és $\psi: S\to S'$ izomorfizmus, akkor $(S', \{\psi\iota_\alpha\})$ is szorzat. Sőt, ha az ε_α izomorfizmusokra a megfelelő szorzatok értelmesek, akkor vehetünk $(P', \{\varepsilon_\alpha\pi_\alpha\varphi\})$-t ill. $(S', \{\psi\iota_\alpha\varepsilon_\alpha\})$-t is.

Gyakran az A_α objektumok összegének (szorzatának) nevezzük az S,P objektumokat, ha találhatóak olyan $\{\iota_\alpha\}$ ($\{\pi_\alpha\}$), morfizmusok, melyekre $(S,\{\iota_\alpha\})$ összeg ($(P,\{\pi_\alpha\})$ szorzat). Ez a szóhasználat megengedhető, hiszen izomorfia erejéig egyértelmű.

Példák:

– ${}_R\mathcal{M}$-ben a szorzat a komplett direkt szorzat ($\pi_\alpha = pr_\alpha$, koordináta-fv. avagy vetítés) választással, az összeg a diszkrét direkt összeg ($\iota_\alpha(A_\alpha)$ az a részmodulusba, amelyben azok az elemek vannak, melyek minden koordinátája 0 az α-adik kivételével).

– $\mathcal{Ab}$-ben ugyanez a helyzet.

– $\mathcal{Set}$-ben a szorzat a Descartes-szorzat, az összeg a diszjunkt unió.

– $\mathcal{Gr}$-ben a szorzat a komplett direkt szorzat. A kéttagú összeg az ún. szabad szorzat, $S = G * H$. Ennek elemei az olyan szavak, melyek G és H elemeiből állnak és nincs bennük két szomszédos betű ugyanabból a csoportból (G-t és H-t előzőleg diszjunkttá kell tenni); a művelet az, amit az ember gondolna. Szabadcsoport faktorcsoportjaként $G*H = \langle G \dot\cup H \mid G, H\rangle$, ahol a feltétel azt fejezi ki, hogy minden G-ben ill. H-ban elvégezhető egyszerűsítés elvégezhető $G*H$-ben is.

8.4 5-lemma

8.4.1 Definíció: ${}_R\mathcal{M}$-ben a $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ diagram egzakt sorozat, ha $\varphi_k : M_k \to M_{k+1}$ $(k = 1\ldots n)$, továbbá $Im\,\varphi_k = Ker\,\varphi_{k+1}$ $(k = 1\ldots n-1)$.

8.4.2 Tétel (5-lemma): legyen $A_k, B_k \in {}_R\mathcal{M}$ $(k = 1\ldots 5)$, az alábbi diagram pedig kommutatív, a sorai pedig egzaktak. Ekkor

(1) ha φ_1 epimorfizmus, φ_2 és φ_4 pedig monomorfizmus, akkor φ_3 monomorfizmus,

(2) ha φ_2 és φ_4 epimorfizmus, φ_5 pedig monomorfizmus, akkor φ_3 epimorfizmus,

(3) ha $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_4$ és φ_5 izomorfimusok, akkor φ_3 is.

$$\begin{array}{ccccccccc}
A_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & A_2 & \xrightarrow{\alpha_2} & A_3 & \xrightarrow{\alpha_3} & A_4 & \xrightarrow{\alpha_4} & A_5 \\
\downarrow{\scriptstyle\varphi_1} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_2} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_3} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_4} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_5} \\
B_1 & \xrightarrow[\beta_1]{} & B_2 & \xrightarrow[\beta_2]{} & B_3 & \xrightarrow[\beta_3]{} & B_4 & \xrightarrow[\beta_4]{} & B_5
\end{array}$$

(3) következik **(1)**, **(2)**-ből. **(1)** és **(2)** hasonlóan bizonyítható, ezért csak **(1)**-t fogjuk belátni.

Bizonyítás: azt akarjuk belátni, hogy $Ker\,\varphi_3 = (0)$. Legyen $x \in Ker\,\varphi_3$ tetszőleges. Ekkor $0 = x\varphi_3\beta_3 \underset{\square}{=} x\alpha_3\varphi_4$, („□": a kommutativitás miatt). φ_4 monomorfizmus, tehát $(x\alpha_3)\varphi_4 = 0 \Rightarrow x\alpha_3 = 0 \Rightarrow x \in Ker\,\alpha_3 \Rightarrow x \in Im\,\alpha_2$. Tehát $\exists y \in A_2 : y\alpha_2 = x$. Ekkor $0 = y\alpha_2\varphi_3 \underset{\square}{=} y\varphi_2\beta_2 \Rightarrow y\varphi_2 \in Ker\,\beta_2 \Rightarrow y\varphi_2 \in Im\,\beta_1$, azaz alkalmas $b \in B_1$-re $b\beta_1 = y\varphi_2$. Mivel φ_1 epimorfizmus, b előáll $z\varphi_1$ alakban, $z \in A_1$.

$z\alpha_1\varphi_2 \underset{\square}{=} z\varphi_1\beta_1 = b\beta_1 = y\varphi_2 \Rightarrow (z\alpha_1 - y)\varphi_2 = 0$. φ_2 monomorfizmus, így ebből következik $y = z\alpha_1$. Eszerint $x = y\alpha_2 = z\alpha_1\alpha_2 = 0$, hiszen az egzaktság alapján $\alpha_1\alpha_2$ nullhomomorfizmus. x tetszőleges eleme volt $Ker\,\varphi_3$-nak, tehát $Ker\,\varphi_3 = \{0\}$.

A fenti bizonyítási technika neve diagramvadászat (diagram chasing); azt hiszem érthető, miért.

8.4.3 Definíció: rövid egzakt sorozat egy $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$ egzakt sorozat.

Vizsgáljuk meg, mit jelent egy ilyen rövid egzakt sorozat. Az egzaktság miatt $Ker\,\alpha = \{0\}$, tehát α monomorfizmus $\Rightarrow A \simeq Im\,\alpha = A_0$. Szintén az egzaktság miatt $Im\,\beta = C$, tehát β epimorfizmus $\Rightarrow C \simeq B/Ker\,\beta = B/A_0$. Eszerint B A-nak C-vel való bővítése. Ez a 'legjobb' leírása a bővítésnek, hiszen megadja, hogy A és C hogyan helyezkedik el B-ben. (Ez érdekes lehet, hiszen például az Abel-csoportok között Z_4 és $Z_2 \times Z_2$ egyaránt Z_2 Z_2-vel való bővítése, mégsem azonosak.)

Ha a bővítéseket (A C-vel való bővítéseit) rövid egzakt sorozatokkal akarjuk modellezni, akkor ezt a legegyszerűbben úgy tehetjük, hogy vesszük a $0 \longrightarrow A \xrightarrow{?} ? \xrightarrow{?} C \longrightarrow 0$ rövid egzakt sorozatok kategóriáját. A morfizmusok $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$ és $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha'} B \xrightarrow{\beta'} C \longrightarrow 0$ között azok a $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ homomorfizmus-hármasok, melyek kommutatívvá teszik a következő diagramot:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\alpha} & B & \xrightarrow{\beta} & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_1} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_2} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_3} & & \\ 0 & \longrightarrow & A & \underset{\alpha'}{\longrightarrow} & B' & \underset{\beta'}{\longrightarrow} & C & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Azt is kiköthetjük, hogy φ_1 és φ_3 identitás legyen (arra kell vigyázni, hogy a lokális egységek el ne vesszenek; nem vesznek el). Tehát a morfizmusok azok a $\varphi\colon B \to B'$ homomorfizmusok lesznek, melyek a

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\alpha} & B & \xrightarrow{\beta} & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \downarrow{\scriptstyle\varphi} & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & A & \underset{\alpha'}{\longrightarrow} & B' & \underset{\beta'}{\longrightarrow} & C & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

diagramot kommutatívvá teszik. Ez a diagram megfelel az 5-lemma **(3)** pontja feltételeinek, tehát φ izomorfizmus.

Így ha két bővítés mint rövid egzakt sorozat izomorf a fent definiált kategóriában, akkor a megfelelő φ izomorfizmus lesz B és B' között. Sőt, ha két bővítés között fut egy φ morfizmus, akkor az B és B' között izomorfizmus, így persze a két rövid egzakt sorozat között is.